

**UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
UNIDADE ACADÊMICA DE HUMANIDADES, CIÊNCIAS
E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

DAIANE DE FREITAS

**O MOVIMENTO DO PENSAMENTO EXPRESSO NAS
TAREFAS PARTICULARES PROPOSTA POR DAVÝDOV E
COLABORADORES PARA APROPRIAÇÃO DO SISTEMA
CONCEITUAL DE FRAÇÃO**

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Educação da Universidade do
Extremo Sul Catarinense – UNESC,
como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em
Educação.

Orientador: Prof. Dr. Ademir
Damazio

**CRICIÚMA
2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F866m Freitas, Daiane de.

O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por Davydov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração / Daiane de Freitas ; orientador : Ademir Damazio. – Criciúma, SC : Ed. do Autor, 2016.

167 p. : il. ; 21 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2016.

1. Conceito de frações. 2. Proposição davydoviana.
3. Pensamento dialético. 4. Pensamento conceitual.
I. Título.

CDD. 22. ed. 513.26

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

DAIANE DE FREITAS

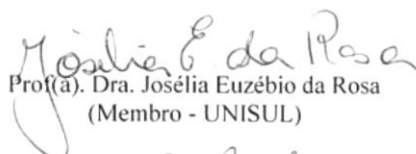
**“O MOVIMENTO DO PENSAMENTO EXPRESSO NAS
TAREFAS PARTICULARES PROPOSTA POR DAVÝDOV E
COLABORADORES PARA APROPRIAÇÃO DO SISTEMA
CONCEITUAL DE FRAÇÃO”**

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.


Criciúma, 17 de fevereiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Ademir Damazio
(Orientador - UNESC)


Prof.ª Dr. Josélia Euzébio da Rosa
(Membro - UNISUL)


Prof. Dra. Silvia Pereira Gonzaga
de Moraes (Membro - UEM)


Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
(Suplente – UNESC)


Profa. Dra. Giani Rabelo
Coordenadora Adjunta do PPGE-
UNESC


Daiane de Freitas
Mestrando

AGRADECIMENTO

Agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para este estudo:

- Ao Prof. Dr. Ademir Damazio por ter orientado a presente pesquisa, na qual admiro e tenho muito respeito.

- Aos integrantes que constituem o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural.

- Aos integrantes que constituem o Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática.

- Aos professores que participaram da banca de qualificação Prof. Dra. Josélia Euzébio da Rosa e Prof. Dr. Vidalcir Ortigara pelas importantes contribuições e reflexões teóricas.

- Aos componentes da banca de defesa Prof. Dra. Josélia Euzébio da Rosa e Prof. Dra. Silvia Pereira Gonzaga de Moraes.

- Aos meus pais, Olívio e Maria, pelo apoio e incentivo nos estudos.

- Ao Israel pelo apoio e o companheirismo.

- Aos demais familiares, amigos e colegas que sempre apoiaram nas diversas fases dessa formação.

- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE da Unesc, pelas contribuições e discussões nas disciplinas cursadas.

- À Vanessa, secretária do PPGE, pela dedicação em seu trabalho e preocupação com os mestrandos.

- À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina – FAPESC, pelo apoio financeiro concebido para a realização desta pesquisa.

“Quando a Educação e os recursos estiverem disponíveis para todos sem uma etiqueta de preço, não haverá limites para o potencial humano”.

Jacques Fresco

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo investigar os movimentos do pensamento – redução e ascensão – para a apropriação do sistema conceitual de fração, a fim de revelar sua base universal. A pesquisa é direcionada pelo seguinte problema: Quais as manifestações do movimento do pensamento – redução e ascensão – nas tarefas particulares do modo davydoviano de organização do ensino, quando colocadas em situação escolar, para a apropriação do sistema conceitual de fração? Por se tratar de um estudo voltado para a apreensão do movimento conceitual – fração – no âmbito de uma organização de ensino, a pesquisa se define na modalidade bibliográfica e apresenta como fonte de análise um livro didático e um livro de orientação do professor referentes ao quinto ano escolar. Para tanto, inicialmente, revisa a literatura que direciona a compreensão do conceito de pensamento numa concepção materialista histórica e dialética. Por consequência, evidenciam-se alguns conceitos considerados necessários para o desenvolvimento do pensamento: concreto e abstrato, processo de análise e síntese, essência e fenômeno, abstração e generalização, entre outros. Isso decorre do pressuposto de que a apreensão deles contribui para o entendimento dos referidos movimentos, isto é, como processo de apreensão do conhecimento que revela a essência dos fenômenos a fim de reproduzi-los como sistema integral. O processo de análise se desenvolveu com base na seguinte unidade: movimento do pensamento do concreto ao abstrato (redução) \leftrightarrow movimento do pensamento do abstrato ao concreto (ascensão). Na proposição davydoviana, a fração surge diante do problema de medição que se manifesta na relação em que a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza a ser medida. Tal impossibilidade gera a necessidade de um novo método de medição, a ser modelado e apropriado pelos estudantes a partir da análise dos métodos antigos. O modelo abstrato $\frac{m}{p}$ traz como significado as relações internas de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas, em que p é o *denominador* e indica o valor da divisão em partes iguais (da unidade) e m é o *numerador* e expressa o valor da repetição para a obtenção da grandeza a ser medida. Tal modelo se caracteriza como abstração inicial, uma vez que reflete a essência, ou seja, a causa do desenvolvimento do conceito de fração.

Palavras-chave: Movimentos do pensamento. Redução e Ascensão. Conceito de Fração. Proposição davydoviana. Abstração e Generalização.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate the movements of thought - reduction and rising - to the appropriation of the concept of fraction, in order to reveal its universal basis. The research is directed by the following problem: What are the manifestations of the movement of thought - reduction and rise - in particular tasks davydoviano way of organization of teaching, when placed in the school situation, to the appropriation of the conceptual system fraction? In the case of a study related to the seizure of the conceptual movement - as part of an educational organization, the survey defined in literature mode and displays as a source of analysis a textbook and a teacher's guide book for the fifth school year. To this end, initially, a review of the literature that directs the understanding of the concept of thought in historical and dialectical materialist conception. Therefore, they show up some concepts considered necessary for the development of thinking: concrete and abstract, process analysis and synthesis, the essence and the phenomenon, abstraction and generalization, and others. This follows from the assumption that the seizure of these contributes to the understanding of these movements, this is, as a process of acquisition of knowledge that reveals the essence of phenomena in order to play them as an integral system. The review process was developed based on the following unit: movement of thought from concrete to abstract (decrease) \leftrightarrow movement of thought from abstract to concrete (rise). In davydovian proposition, the fraction arises before the measurement problem that manifests itself in relation to the unit does not fit a number of times in the entire quantity to be measured. Such failure creates the need for a new measurement method to be modeled and appropriate by students from the analysis of the old methods. The abstract model has as meaning the internal relations of multiplicity and divisibility of magnitudes, in which p is the denominator and indicates the division value in equal parts (of unit) and m is the numerator and expresses the amount of repetition to obtain the greatness to be measured. This model is characterized as initial abstraction, since it reflects the essence, that is, the cause of development of the fraction concept.

Keywords: Movements of thought. Reduction and Ascension. Fraction concept. Proposition davydoviana. Abstraction and generalization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação de correspondência entre quantidade e numeral	32
Figura 2 – Relação entre grandeza e unidade de medida	33
Figura 3 – Painel de azulejos.....	34
Figura 4 – Decomposição do painel de azulejos	36
Figura 5 – Dados referentes à situação <i>a</i> da tarefa 1	80
Figura 6 – Processo de medição em relação aos segmentos A e C	81
Figura 7 – Processo de medição em relação ao segmento B	82
Figura 8 – Representação (literal) da medida do segmento B	85
Figura 9 – Reta numérica	85
Figura 10 – Representação das medidas dos segmentos A e C	86
Figura 11 – Insuficiência da medida E para a medição do segmento B	86
Figura 12 – Dados referentes à situação <i>b</i> da tarefa 1	87
Figura 13 – Representação na reta numérica com a unidade K.....	87
Figura 14 - Modelo Universal: multiplicação e divisão	89
Figura 15 – Multiplicação e divisão no modelo abstrato.....	91
Figura 16 – Situação de medida no modelo universal.....	91
Figura 17 - Operacionalização da divisão na reta numérica.....	92
Figura 18 – Situações <i>a</i> e <i>b</i> da tarefa 3.....	94
Figura 19 – Pentágonos A e T.....	95
Figura 20 – Construção do perímetro do pentágono A	96
Figura 21 – Esquema da medição do segmento A	96
Figura 22 – Diferença entre os comprimentos: E e lado de T	97
Figura 23 – Construção da unidade intermediária.....	97
Figura 24 – Unidade intermediária C	98
Figura 25 – Construção do segmento: perímetro do pentágono T.....	98
Figura 26 – Esquema de medição segmento T	99
Figura 27 – Medição com base nos pentágonos A e T.....	99
Figura 28 – Construção do segmento do perímetro do pentágono A ..	100
Figura 29 – Esquema de medição do segmento A	100
Figura 30 – Análise entre situação <i>a</i> e <i>b</i>	101
Figura 31 – Diferença entre os comprimentos: E e lado de T	101
Figura 32 – Medição do lado do pentágono T com a unidade E	102
Figura 33 – Comprimento da unidade básica E.....	102
Figura 34 – Subdivisão da unidade: primeira possibilidade.....	103
Figura 35 – Subdivisão da unidade: segunda possibilidade	104
Figura 36 - Esquema do processo de medição da medida E	104
Figura 37 – Construção do segmento: perímetro do pentágono T.....	105
Figura 38 – Esquema de medição segmento T	105
Figura 39 – Dados referentes à tarefa 4.....	108

Figura 40 – Resolução da tarefa 4: adoção do método novo.....	109
Figura 41 – Resolução da tarefa 4: adoção do método antigo.....	110
Figura 42 – Síntese referente aos métodos de medição.....	111
Figura 43 - Dados referentes à tarefa 6	113
Figura 44 – Processo de medição da tarefa 6: situações 1, 2 e 3	114
Figura 45 – Dados referentes à tarefa 7.....	115
Figura 46 – Representação da distinção dos fatores p e m	117
Figura 47 – Situação 1 da tarefa 8.....	117
Figura 48 – Resolução da situação 1 da tarefa 8	118
Figura 49 - Situação 2 da tarefa 8.....	118
Figura 50 – Construção detalhada situação 2 da tarefa 8	119
Figura 51 - Resolução da situação 2 da tarefa 8.....	119
Figura 52 – Método antigo: relação de comutatividade	120
Figura 53 – Método novo: relação de comutatividade	120
Figura 54 – Situação particular para a verificação da comutatividade	121
Figura 55 – Comutatividade do novo método de medição	122
Figura 56 – Representação geométrica: relação de comutatividade....	123
Figura 57 – Esquema a ser completado na tarefa 10	123
Figura 58 – Resolução parcial da tarefa 10	124
Figura 59 – Resolução da comutatividade da tarefa 10.....	125
Figura 60 – Modelo universal do conceito de fração	125
Figura 61 – Processos que explicitam o movimento de redução.....	126
Figura 62 – Dados referentes à tarefa 11	128
Figura 63 – Etapa 1 da resolução da situação 1 da tarefa 11	129
Figura 64 – Etapa 2 da resolução da situação 1 da tarefa 11	129
Figura 65 – Resolução da situação 2 da tarefa 11	130
Figura 66 – Dados referentes à tarefa 12.....	131
Figura 67 – Dados referentes à tarefa 13.....	133
Figura 68 – Resolução da tarefa 13.....	134
Figura 69 – Números racionais	135
Figura 70 – Dados referentes à tarefa 14.....	136
Figura 71 – Resolução da tarefa 14	136
Figura 72 – Dados referentes à tarefa 15.....	138
Figura 73 – Representação do número racional na reta numérica.....	139
Figura 74 – Representação da reta numérica.....	140
Figura 75 – Representação da reta numérica: números racionais	141
Figura 76 – Processos que explicitam o movimento de ascensão	142

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Síntese referente aos princípios didáticos propostos pela escola tradicional e os propostos por Davýdov e colaboradores. 68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
GPEMAHC	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural
TEDMAT	Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvidor na Educação Matemática.
UEPI	Universidade Estadual do Piauí
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UNESC	Universidade do Extremo Sul Catarinense
UNIBAVE	Centro Universitário Barriga Verde
UNISUL	Universidade do Sul de Santa Catarina

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	23
1 PRESSUPOSTOS INICIAIS E DESCRIÇÃO DA TRAJETÓRIA DA CONSTITUIÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA	24
1.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	42
2 O MOVIMENTO DO PENSAMENTO NA LÓGICA DIALÉTICA E A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO EM DAVÝDOV.....	47
2.1 O PENSAMENTO DIALÉTICO: UNIDADE ENTRE O ABSTRATO E O CONCRETO	47
2.2 O MODO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DAVYDOVIANO	62
2.2.1 Atividades de estudo e sua estrutura	71
3 INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO EM DAVÝDOV	78
3.1 AS TAREFAS GERADORAS DO MOVIMENTO DO CONCRETO AO ABSTRATO DO PENSAMENTO CONCEITUAL	79
3.2 AS TAREFAS GERADORAS DO MOVIMENTO DO ABSTRATO AO CONCRETO DO PENSAMENTO CONCEITUAL.....	127
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	144
REFERÊNCIAS	150
ANEXOS	157

APRESENTAÇÃO

O objeto de estudo da presente dissertação foi se constituindo desde o curso de graduação, Licenciatura em Matemática. Esse início propiciou a reflexão sobre o conhecimento matemático e a organização do ensino, de modo que o foco na aprendizagem se voltasse para as relações conceituais do que, até então, denominávamos de conteúdo matemático. Tais reflexões despertaram o interesse em buscar outras formas de organização do ensino, que não fosse aquela que marcou nossa experiência de aluna nos diversos níveis de escolaridade (básico e superior). O desafio se inicia e se intensifica com a participação em um grupo de pesquisa, como bolsista de iniciação científica.

Esse envolvimento e atuação no grupo de pesquisa possibilitou o contato com os pressupostos teóricos – até então totalmente desconhecidos – que fundamentam uma nova organização de ensino. Inserimo-nos, pois, no estudo da filosofia materialista histórica e dialética, de modo mais específico, sobre a proposição de ensino de Davýdov e colaboradores, voltado para o conhecimento matemático.

É no âmbito do modo de organização do ensino de Davýdov e colaboradores que se delimitaram a temática e o objeto de estudo desta investigação, os quais tratam do movimento do pensamento para a apropriação do sistema conceitual de fração referente ao quinto ano escolar.

Para tanto, a dissertação foi organizada em quatro capítulos. O primeiro traduz o movimento de constituição do objeto, a delimitação do problema de pesquisa e seus objetivos, bem como apresenta as orientações metodológicas que conduzem o processo investigativo. O segundo capítulo se destina às compreensões quanto aos fundamentos teóricos/filosóficos do movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto. Além disso, apresenta as peculiaridades do modo de organização davýdoviano do ensino. O terceiro capítulo trata da análise das tarefas particulares referentes a introdução do conceito de fração, inerentes ao movimento de redução (concreto ao abstrato) e de ascensão (abstrato ao concreto). O último capítulo expressa a síntese de ambos os movimentos, de modo a revelar as evidências voltadas ao problema de pesquisa.

1 PRESSUPOSTOS INICIAIS E DESCRIÇÃO DA TRAJETÓRIA DA CONSTITUIÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

Neste capítulo, inicialmente, apresentamos alguns momentos de nossa trajetória acadêmica, que expressam a aproximação com o objeto de estudo da presente pesquisa. Também destacamos situações de envolvimento em práticas sociais que propiciaram reflexões, possibilitando-nos a apreensão de novos conhecimentos e elaboração de novas concepções. Essas aquisições suscitaram-nos questionamentos, dúvidas e evidências de contradições que, de certa forma, foram decisivas para a produção desta dissertação.

Isso significa dizer que a finalidade deste capítulo incide na explicitação do movimento de constituição do objeto, do problema e objetivos de pesquisa, bem como das orientações metodológicas que nos conduziram no processo investigativo. Para tanto, o esforço foi para a tradução das múltiplas relações que determinaram a existência e o desenvolvimento do objeto de estudo.

A origem desse processo sobreveio no curso de graduação, pois foi nesse espaço-tempo que ocorreu a ampliação dos conhecimentos que, por consequência, propiciaram a reflexão sobre o conhecimento matemático. Isso nos fez pensar também sobre o processo de apropriação dos conceitos e a organização do ensino. Nossas compreensões, elaboradas como estudantes da Educação Básica, eram difusas e incertas, uma vez que não tínhamos formado pensamentos em nível de subsidiar questionamentos a respeito dos nossos conhecimentos e do modo como estes foram adquiridos. Naquela fase de nossa atividade de estudo, a preocupação em relação à Matemática era resolver todos os exercícios e reproduzi-los na avaliação de modo a obter a aprovação a cada ano letivo. Tanto a explicação do professor quanto os exercícios propostos direcionavam nosso pensamento para a memorização dos procedimentos de resolução de determinada situação particular. O professor apresentava uma lista de exercícios com as respostas a serem obtidas e nós os resolvíamos até alcançarmos os resultados. Caso ocorresse de em algum deles não conseguirmos o resultado esperado, o professor o desenvolvia no quadro, para que copiássemos no caderno.

Em 2010, com o ingresso no curso de Licenciatura Plena em Matemática, na Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, tínhamos como objetivo inicial a formação docente, isto é, habilitarmos para o ensino do conhecimento matemático. A opção pelo curso surgiu da necessidade de compreendermos a essência dos conceitos matemáticos, para além da superficialidade vivenciada na Educação

Básica. Afinal, a forma que o conhecimento foi transmitido pelos professores não propiciava as discussões sobre o conteúdo inerente aos conceitos estudados.

No primeiro semestre do curso, o ensino das disciplinas se assemelhou aos procedimentos apropriados na formação anterior, em que o professor, ao transmitir o conhecimento, primeiro passava no quadro a definição do conceito e a seguir resolvia alguns exemplos que, posteriormente, serviriam de base para a realização da lista de exercícios.

Entretanto, no segundo semestre, surgiram as primeiras distinções sobre o modo de organização do ensino. Isso em decorrência da explicação de uma professora, que apresentava os conceitos por meio das inter-relações das significações aritméticas, geométricas e algébricas. Ou seja, a referida professora organizava o ensino de modo que promovia a compreensão dos três campos do conhecimento matemático. O foco na aprendizagem se voltava para as relações conceituais do conteúdo matemático. Diferentemente do ensino proposto por alguns professores, que reduziam a apropriação conceitual à resolução dos exercícios, isto é, apenas faziam os estudantes resolvê-los até chegarem a um determinado resultado.

A partir de então, apresentou-se a primeira contradição no que se refere ao modo de obtenção do conhecimento matemático, que para alguns professores eram concebidos como algo estável. Desse modo, os conceitos apreendidos consistiam em aspectos isolados a serem apropriados pelo pensamento. No entanto, outros professores tinham a concepção de que o conhecimento era concebido em movimento, cujas apreensões ocorrem mediante um sistema conceitual de inter-relação das significações que os constituem.

Ter por base tal entendimento suscitou-nos alguns questionamentos, entre eles: O que é o conhecimento matemático? O que é o ensino? O que é ser professor de Matemática? Tais dúvidas surgiram da necessidade de compreender o processo de ensino do conhecimento matemático, bem como entender sua organização e suas manifestações.

As reflexões acerca das questões levantadas somente foram aprofundadas com as contribuições de um professor que lecionava a disciplina Didática da Matemática. Nela, o estudo sobre o conhecimento matemático e seu processo pedagógico escolar teve início a partir das várias tendências que, de acordo com Fiorentini (1995), fundamentam o ensino que os professores tomam por base em sua prática pedagógica. Isso porque se pressupõe que toda atividade de ensino do professor tem seu fundamento em uma perspectiva teórica que se constitui num dado período histórico apropriado por ele em sua vivência escolar. Isso nos

levou ao entendimento de que o professor não organiza o ensino a partir do nada; ele busca constituir sua prática a partir dos conhecimentos já apropriados.

Na investigação sobre *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil*, Fiorentini (1995) identificou seis tendências pedagógicas do ensino da Matemática, que permearam diferentes momentos históricos da educação escolar brasileira. Essas podem ser classificadas em dois grupos: o primeiro toma por base a concepção platônica, peculiaridade das tendências formalista clássica, formalista moderna e tecnicista; o segundo é constituído pelas tendências que têm por fundamento a base empírica: a empírico-ativista, a construtivista e a socioetnoculturalista.

O estudo das abordagens nos oportunizou o entendimento de que existem diversas formas de conceber o conhecimento matemático, bem como o modo de organização de seu ensino e da aprendizagem dos estudantes. Além disso, possibilitou-nos a identificação de que algumas delas apresentam o mesmo fundamento filosófico, mas se divergem quanto ao processo de produção do conhecimento. Por exemplo, duas dessas tendências – a formalista clássica e a empírico-ativista – têm a mesma base filosófica, a idealista. Para a formalista clássica, no entanto, o conhecimento é caracterizado pelo modelo euclidiano (definições, axiomas, postulados, entre outros), bem como pela concepção platônica de Matemática. Tem por princípio o pensamento metafísico ao reconhecer que as coisas existem por possuírem uma essência, que é determinada por um ser transcendente (razão, ideia).

De acordo com Fiorentini (1995), Platão afirmava que as essências verdadeiras são aquelas determinadas pela ideia, por isso as distingue em dois mundos: o mundo inteligível e o mundo sensível. O conhecimento, no primeiro mundo, consiste na essência das coisas (ideias perfeitas, únicas, imutáveis). No segundo, é concebido como imperfeito (múltiplo, mutável, contingente). A apropriação do conhecimento matemático ocorre por meio da contemplação das ideias, obtidas pela intuição e reminiscência. No processo de obtenção do conhecimento, busca-se “[...] descobrir as ideias matemáticas pré-existentes (*sic*) em um mundo ideal, mas que estão adormecidas em sua mente” (FIORENTINI, 1995, p. 6).

A tendência empírico-ativista, apesar de também apresentar uma concepção metafísica, se diferencia da formalista clássica, pois entende que o conhecimento está no mundo físico (sensível), ao invés de no mundo das ideias. A base de seu desenvolvimento é a experimentação, que é captada pelos órgãos dos sentidos. O processo de apropriação do conhecimento consiste na internalização da manipulação de objetos ou de

situações experimentais, que são relacionados com as ideias preexistentes do material que se deseja conhecer.

Contudo, ambas as tendências concebem o conhecimento como a-histórico e que o processo de aquisição ocorre por descoberta, visto que as ideias já existem independentemente da consciência (FIORENTINI, 1995). O mesmo ocorre com as demais tendências que apresentam uma concepção filosófica idealista, pois entendem o conhecimento como algo absoluto (TRIVIÑOS, 1987). Todas elas, nessa perspectiva, desconsideram o processo histórico no processo de elaboração dos conceitos em situação de ensino e aprendizagem, os quais são apreendidos de modo fragmentado e isolado e sem estabelecer uma relação com a realidade objetiva. Nesse sentido, o movimento do pensamento para apropriação do conhecimento consiste em fazer com que o estudante reproduza as técnicas de resolução de situações particulares, ao invés de se apropriar da lógica conceitual, das leis de formação do conceito.

Em contraposição a essa forma de conceber o conhecimento como algo imutável e a-histórico, apresenta-se a Teoria Histórico-Cultural, fundamentada na concepção materialista histórica e dialética. O conhecimento é uma produção histórica, resultante da atividade humana, que não se encontra pronto na natureza nem é uma qualidade interna do espírito (pura ideia). Ele surge e se desenvolve na relação mútua entre o sujeito e o objeto, isto é, como uma das objetivações da atividade prática humana (ANDERY, 2002).

É essa abordagem que fundamenta a prática docente da professora mencionada anteriormente por se diferenciar dos demais professores. Sua preocupação era promover um ensino voltado à inter-relação dos conceitos, para que os estudantes se apropriassem das leis de formação, ao invés da redução lógica de resolução de exercícios. Foi em suas aulas que ocorreu o primeiro contato com essa perspectiva teórica. Naquele momento, não tínhamos conhecimento sobre tal concepção, mas era possível observar que se apresentava algo novo, principalmente no que se refere ao conteúdo e ao método do ensino de Matemática.

A explicação para esse modo pedagógico de ser da professora está na sua participação, como membro efetivo, no Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural – GPEMAHC. Esse grupo se caracteriza como interinstitucional, pois conta com a colaboração de pesquisadores de várias universidades, como UNESC, UNISUL, UFSC, UEPI e UNIBAVE. Entre outros objetos de estudo, destaca-se o modo de organização do ensino para a formação e

apropriação dos conceitos matemáticos, com fundamentos na Teoria Histórico-Cultural elaborada por Vygotski¹ e seus continuadores.

Nossa aproximação com o referido grupo de pesquisa é decorrente do convite da referida professora. Ao inserirmo-nos no Grupo, de imediato, incumbimo-nos do desenvolvimento de pesquisas de iniciação científica², vinculadas ao projeto mais amplo do GPMAHC. Esse envolvimento com os estudos nos propiciou o aprofundamento da base teórica do materialismo histórico dialético, matriz teórica da Teoria Histórico-Cultural.

Dentre os estudiosos dessa perspectiva teórica, o grupo de pesquisa apresenta, atualmente, como uma de suas principais referências as obras de Davýdov³, estudioso que compôs a terceira geração após Vygotski. A relevância pelos estudos desenvolvidos por Davýdov está na objetivação dos pressupostos teóricos da Teoria Histórico-Cultural, bem como na orientação teórica e metodológica do materialismo histórico e dialético em uma proposição de ensino. Durante 25 anos, Davýdov se dedicou a pesquisas que visavam à formulação de uma teoria de ensino que propiciasse o desenvolvimento do pensamento científico das crianças e jovens (LIBÂNEO; FREITAS, 2013). Isso porque o ensino proposto em seu país, a Rússia, era considerado por ele e seus colaboradores, no período da Revolução Soviética, insuficiente para formar o novo homem socialista (DAVÍDOV, 1988).

Seus estudos evidenciaram que tanto o conteúdo quanto o método, que compõem o currículo de seu país, não atendiam às condições necessárias para o desenvolvimento intelectual teórico dos estudantes. O ensino que se desenvolvia até aquele momento se fundamentava nos princípios didáticos da escola tradicional⁴, quais sejam: caráter sucessivo,

¹ Utilizaremos a grafia Vygotski, porém, quando se tratar de referência, será preservada a escrita original.

² Como bolsista foram desenvolvidas duas pesquisas de iniciação científica, uma financiada pelo Programa de Iniciação Científica (PIC-170) da UNESC e outra pelo Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior (FUMDES). Ambas serão mencionadas posteriormente, com o propósito de revelar o processo de constituição do objeto de pesquisa da presente investigação.

³ Utilizaremos a grafia Davýdov, porém, quando se tratar de referência, será preservada a escrita original.

⁴ Segundo Davýdov (1987, p. 143) entende-se pelo termo escola tradicional “ un sistema relativamente único de educación europea, la que, en primer lugar, se formó en el período de nacimiento y florecimiento de la producción capitalista y a la cual sirvió; que, en segundo lugar, fue fundamentada en los trabajos de Ya

acessibilidade, caráter consciente e, por fim, o princípio do caráter visual (DAVÍDOV, 1987)⁵. Esses princípios, segundo o autor, orientam o ensino para o desenvolvimento do pensamento empírico-classificador, que “[...] assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e sociedade” (DAVÍDOV, 1987, p. 144).⁶

Tal situação não difere do que ocorre no sistema escolar brasileiro, conforme investigações de integrantes dos grupos GPEMAHC e TEDMAT (ROSA, 2006, 2012; ROSA, DAMAZIO e ALVES, 2013; ROSA, DAMAZIO e CRESTANI, 2014; HOBOLD, 2014; SILVEIRA, 2015). Esses estudos trazem evidências de que os conceitos matemáticos desenvolvidos pelos livros didáticos brasileiros seguem os princípios didáticos do ensino tradicional.

A título de ilustração, apresentamos as sínteses de duas dessas pesquisas. Uma delas, o estudo de Rosa (2012, p. 32), buscou investigar, “nas proposições davydovianas para introdução do ensino do conceito de número, a possível interconexão das significações aritméticas, algébricas e geométricas”. Os resultados de sua pesquisa apontam para uma proposta de ensino mais concreta e plena de conteúdo, quando analisada em relação às proposições atuais brasileiras, explicitadas nos livros didáticos. Nas palavras da autora, a proposição davydoviana reproduz “o sistema de nexos e relações que constitui os números reais como um todo indissolúvel em conexão com os naturais, inteiros, racionais e irracionais, ou seja, é o concreto do conceito, em sua integridade” (ROSA, 2012, p. 228). Por sua vez, nas proposições brasileiras, o ensino do conceito de número, no primeiro ano escolar, aproxima-se do que Davýdov

Komenski, I. Pestalozzi, A. Diesterweg, K. Ushinski y otros destacados pedagogos de esse período y que, en tercer lugar, conserv Komenski, I. Pestalozzi, A. Diesterweg, K. Ushinski y otros destacados pedagogos de ese período y que, en tercer lugar, conservó hasta ahora sus principios iniciales como base para la selección del contenido y los métodos de enseñanza en la escuela actual ”.

⁵ Os princípios adotados pela escola tradicional serão aprofundados conceitualmente no referencial teórico, segundo capítulo desta dissertação.

⁶ As citações em língua espanhola usadas nesta dissertação foram por nós traduzidas. Como forma de possibilidade de conferência e fidelidade, trazemos a escrita original em nota de rodapé.

⁶ [...] asegura la orientación de la persona en el sistema de conocimientos ya acumulados sobre las particularidades rasgos externos de objetos y fenómenos aislados de la naturaleza y la sociedad (DAVÍDOV, 1987, p. 144).

denominou de ensino tradicional, visto que não se contemplam as significações algébricas e geométricas; a ênfase consiste apenas para a significação aritmética. Conforme a referida autora, o número, sob esse aspecto, é caracterizado apenas pelo número natural, resultante da quantidade de objetos discretos (ROSA, 2012).

Outro estudo, nessa perspectiva, foi realizado por Hobold (2014) sobre o movimento conceitual da tabuada. A autora evidenciou que na proposição brasileira analisada, coleção *Porta Aberta*, há aproximação com os fundamentos oriundos da lógica formal tradicional. Conforme Hobold (2014), o conceito de multiplicação, considerado base para tabuada, é elaborado a partir da percepção dos objetos dados (ursos, carrinhos, piões, entre outros). Por decorrência, sugere a abstração dos atributos comuns em cada situação de estudo, revelada por meio do processo de comparação dos indícios. Para tanto, basta a identificação do que é comum a todos os objetos (um urso marrom mais um urso verde resultam em dois ursos; dois carrinhos vermelhos mais dois carrinhos azuis resultam em quatro carrinhos, por exemplo). Ao indicar os indícios comuns (nesse caso, a quantidade) por meio de palavras, atinge-se o conceito “multiplicar é o mesmo que adicionar quantidades iguais” (HOBOLD, 2014, p. 184).

Em contraposição à lógica formal, o conceito de multiplicação na proposição de ensino davydoviana é desenvolvido a partir da relação de multiplicidade entre grandezas. Nessa relação, emerge a necessidade de se adotar uma nova unidade de medida, a intermediária. Esta tem por significação tornar mais cômodo o processo de medição, uma vez que a unidade de medida básica é consideravelmente menor que a grandeza a ser medida. Em síntese, o conceito de multiplicação consiste na verificação da quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete para obtenção do valor total (medidas básicas) de uma determinada grandeza (HOBOLD, 2014). “No contexto da tabuada, a essência é uma relação entre as unidades de medida básica e intermediária e o total destas” (HOBOLD, 2014, p. 120).

A partir dos estudos em referência, pode-se observar que, mesmo se tratando de países diferentes, o ensino proposto nas escolas da Rússia na década de 1980 apresenta os mesmos fundamentos, segue princípios idênticos àqueles adotados no ensino brasileiro, que consistem em

[...] inculcar na maior parte das crianças, filhas dos trabalhadores, apenas aqueles conhecimentos e habilidades, sem os quais é impossível obter uma profissão mais ou

menos significativa na produção industrial e na vida social (saber escrever, contar, ler; ter ideias elementares sobre o circundante) (DAVÍDOV, 1987, p. 143)⁷.

Na busca pela superação desse ensino, de modo que atendesse ao projeto de formação do novo homem na sociedade socialista, Davýdov e seus colaboradores apresentam uma proposta de ensino orientada “para a formação objetiva da atividade de estudo em função do desenvolvimento do pensamento teórico na escola” (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 328). Para Davýdov, a escola tem a função primordial de ensinar os estudantes a se orientarem com autonomia na informação científica e em qualquer outra esfera do conhecimento, isso mediante um ensino que promova o desenvolvimento do pensamento teórico (LIBÂNEO; FREITAS, 2013).

Davýdov (1988) ressalta que o pensamento desenvolvido pelo estudante antes de ingressar na escola tem por base as relações cotidianas que, de certa forma, possibilitam a resolução de problemas comuns mediante a assimilação das características e propriedades externas do objeto. Esse tipo de pensamento segue a interpretação da lógica formal, que tem por princípio o caráter visual, direto, cujo processo de generalização infere-se da percepção empírica do objeto, por via da observação do material concreto dado visualmente e captado sensorialmente (DAVÍDOV, 1988). Nesse caso, os processos de abstração, generalização e formação do conceito – a serem desenvolvidos pelo estudante – descrevem apenas os resultados do pensamento empírico (HOBOLD, 2014). De acordo com Davýdov (1988, p. 105),

os processos de pensamento se limitam aqui: 1) para a comparação dos dados sensoriais concretos com o fim de separar as características formalmente gerais e realizar sua classificação; 2) para a identificação dos objetos sensoriais concretos com o fim de sua inclusão em uma ou outra classe.⁸

⁷ [...] inculcar a la mayor parte de los niños de los trabajadores sólo aquellos conocimientos y habilidades, sin los cuales es imposible obtener una profesión más o menos significativa en la producción industrial y en la vida social (saber escribir, contar, leer; tener ideas elementales sobre lo circundante) (DAVÍDOV, 1987, p. 143).

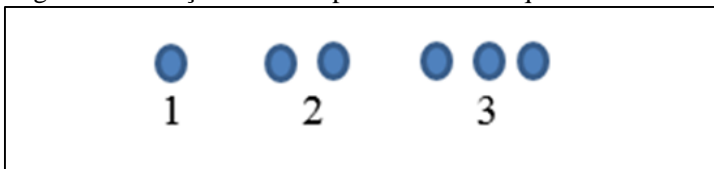
⁸ Los procesos de pensamiento se limitan aquí: 1) a la comparación de los datos sensoriales concretos con el fin de separar los rasgos formalmente generales y

Em contraposição a essa forma de pensar, o pensamento teórico contempla as abstrações e as generalizações do processo histórico, cujo conhecimento acumulado, ao ser apropriado pelo sujeito, permite a compreensão da realidade para além das situações cotidianas (DAVÍDOV, 1988).

No âmbito dessa discussão, desenvolvemos a primeira pesquisa de iniciação científica com o objetivo de analisar ambas as formas de pensamento, empírico e teórico, no que se refere ao movimento do pensamento para apropriação do conceito de número. Os dados de análise foram dois livros didáticos brasileiros⁹ e a proposta de ensino de Davýdov e colaboradores¹⁰, com foco para o movimento do pensamento, expresso em cada modo de organização do ensino.

O estudo de Rosa (2012) mostra que, nas proposições brasileiras, o movimento do pensamento inicia-se pela percepção do objeto dado imediatamente aos órgãos dos sentidos, cujas características e propriedades externas são convertidas em conteúdo para aprendizagem, durante a seleção e comparação de objetos soltos. Assim sendo, a apropriação do conceito de número se dá a partir dos estudos dos números naturais, e por meio do princípio da contagem se estabelece a relação (biunívoca) entre objeto e quantidade (método associativo), conforme a figura 1.

Figura 1 – Relação de correspondência entre quantidade e numeral



Fonte: Elaboração conforme o estudo de Rosa (2012).

Tal movimento explicitado, de acordo com Davýdov (1988), busca cultivar nas crianças apenas um tipo de pensamento, o empírico. Esse, por sua vez, tem sua importância quanto ao desenvolvimento de ações

realizar su clasificación; 2) a la identificación de los objetos sensoriales concretos con el fin de su inclusión en una otra clase (DAVÍDOV, 1988, p. 105).

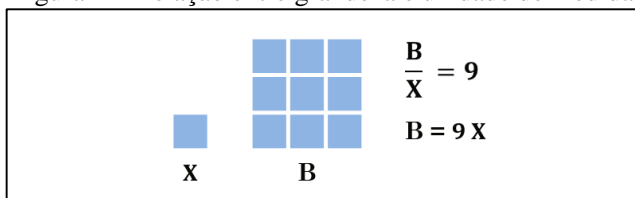
⁹ 1) BORDEAUX, A. L. et al. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 1º ano. São Paulo: Editora do Brasil, 2008; e 2) D'ALBERTAS, C. et al. **Matemática**, 1º ano. São Paulo: Atual, 2009 (Projeto Descobrir).

¹⁰ A referência base do estudo da proposição de ensino davydoviana para o conceito de número foi a tese desenvolvida por Rosa (2012).

rotineiras do dia a dia, porém se torna insuficiente e obstaculiza o processo de apropriação do conhecimento científico.

A proposição davydoviana – na especificidade do conceito de número – desencadeia um movimento de pensamento que se volta para a apropriação das relações gerais apresentadas na comparação entre as grandezas. O processo de medição (quantas vezes a unidade de medida cabe na grandeza) permite determinar a relação múltipla universal reproduzida no modelo para o conceito teórico de número: $A/B=N$ ou $A=BN$ (ROSA, 2012). A figura 2 manifesta uma especificidade da referida relação universal ao se estabelecer X como unidade para medir a grandeza B. Ou seja, 9 a quantidade de vezes que X cabe em B; ainda que B é igual a nove vezes o X.

Figura 2 – Relação entre grandeza e unidade de medida



Fonte: Elaboração conforme o estudo realizado por Rosa (2012).

Para Davýdov (1982), o conceito teórico de número não surge como resultado imediato da contagem, mas apresenta-se inicialmente no concreto sensível, sob a forma de propriedades e características do objeto (cor, forma, tamanho e posição), obtidas por meio do processo de medição entre grandezas. Nessa relação com o objeto é que surgem as primeiras abstrações: menor, maior, igual e diferente ($<$; $>$; $=$ e \neq). Estas são representadas, gradativamente, nas formas objetal, gráfica e literal. O movimento que proporciona o avanço – que não é linear – de uma representação para outra (objetal \rightarrow gráfica \rightarrow literal) possibilita a passagem para o plano mental. De acordo com Kopnin (1958), nesse nível de abstração, o pensamento não opera com representações, mas com conceitos, que permitem a reprodução mental do seu conteúdo. Para Davýdov (1982), é nos estudos das relações entre grandezas que os estudantes atingem as condições intelectuais para a reprodução teórica, bem como a generalização e construção de um modelo universal.

Essas sínteses de nossa primeira pesquisa suscitaram-nos os seguintes questionamentos: Quais os aspectos a serem contemplados, no processo de estudo, para que o estudante se aproprie de um sistema conceitual? Quais conceitos devem ser considerados essenciais ao se

organizar o ensino? Tais questões passaram a ser ponto de partida no desenvolvimento da segunda pesquisa de iniciação científica. Naquela oportunidade, nosso interesse se voltou para a contemplação das premissas do ensino proposto por Davýdov (1982) e colaboradores na organização do ensino para o conceito de equação do segundo grau.

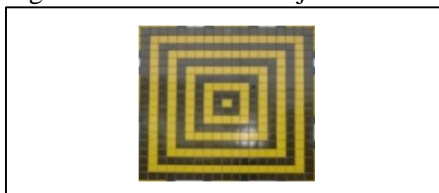
Estabelecemos como objetivo o planejamento de algumas tarefas particulares – para o estudo do referido conceito matemático – em conformidade com as premissas davydovianas, no que diz respeito à relação geral/universal/particular/singular e o movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto.

Para tanto, fez-se necessário o estudo das seguintes bibliografias: Davýdov (1982), no que se refere aos conteúdos e modo de organização do ensino; Kopnin (1958), na compreensão do princípio materialista histórico e dialético do abstrato e do concreto como momentos do pensamento; e Rosa (2012), na objetivação da proposição de ensino de Davýdov para o conceito teórico de número.

Com as leituras, verificamos que o ensino proposto pelo autor se refere à atividade de estudo, cujos componentes estruturais de sua organização são: 1) tarefas de estudo; 2) ações de estudos; 3) tarefas particulares (ROSA, 2012).

Tomando por base essa estrutura, na nossa pretensa organização do ensino para equação do segundo grau, estabelecemos a seguinte tarefa de estudo: a obtenção das noções do conceito de equação do segundo grau por meio da comparação de grandezas, que possibilite a formação de um quadrado perfeito com as significações aritméticas, geométricas e algébricas. Por sua vez, na produção das tarefas particulares, seguimos a orientação de Davýdov (1982) quanto à necessidade de explicitação da grandeza e à unidade de medida como referência de todos os conceitos matemáticos. Contudo, foram elaboradas três tarefas particulares, tomando-se como referência um painel decorativo (Figura 3) que consta no acervo do GPEMAHC, que foi objeto de estudo de pesquisadores do grupo em pesquisas anteriores.

Figura 3 – Painel de azulejos



Fonte: Acervo do GPEMAHC.

Também não perdemos de vista a finalidade de que as tarefas particulares fossem organizadas de modo tal que, em situação de ensino, colocassem os estudantes em atividade de estudo. Isso requereu a atenção à outra orientação de Dávidov (1988), citada em Rosa (2012, p. 70), da necessidade de colocar o estudante “[...] em ação investigativa, que contribuirá para desenvolver-lhe a capacidade de estruturar autonomamente e transformar de modo criador sua própria atividade de estudo”.

Na tarefa de introdução, por exemplo, o processo investigativo é orientado pelo professor e mediado pelas situações de análise (forma, tamanho e posição). Por meio de perguntas, o professor propõe a comparação entre as superfícies do painel, o qual se encontra decomposto em partes que constituem uma sequência de superfícies quadradas, cujas áreas aumentam em relação à anterior. Tal processo visa ao desenvolvimento, pelos estudantes, de operações não espontâneas, como: levantar hipóteses, delimitar perguntas e estabelecer relações entre objetos (ROSA, 2012).

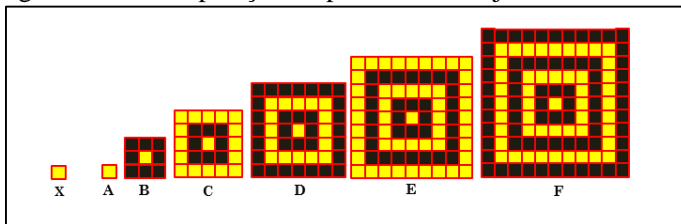
As tarefas posteriores direcionam para a relação entre as grandezas (comprimento e área das superfícies quadradas). Conforme Rosa (2012, p. 82), “a possibilidade de determinar o tamanho de uma figura ocorre somente na relação com outra”. Ou seja, não é possível comparar grandezas (área, volume, massa, etc.) se estiverem isoladas. No processo de comparação, há a necessidade de se estabelecer uma unidade de medida como elemento mediador.

Nessas tarefas particulares, a orientação consistia na verificação de quantas vezes a unidade de medida cabe na grandeza (por exemplo, na figura 2, a unidade de medida X coube nove vezes na grandeza B). A atenção também se voltava para a representação do processo comparativo, por traduzir o movimento de sucessivas abstrações de grau mais elevado, o que se distancia da representação direta (contemplada na tarefa de introdução).

Pressupomos que, com a resolução das tarefas particulares, o estudante, por meio dos procedimentos de análise e síntese, reproduza o

modelo, $n = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{B}{X}}}{2}$ (Figura 4).

Figura 4 – Decomposição do painel de azulejos



Fonte: Elaboração conforme o estudo realizado por Damazio et al. (2014).

Por exemplo, no processo de medição da grandeza de área B pela unidade de área X, obteve-se como medida $\frac{B}{X} = 9 u. a.$ Ao substituir o valor na fórmula, encontra-se a ordem da figura da sequência que

corresponde à referida área: $n = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{B}{X}}}{2}$, $\rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$, $\rightarrow n = \frac{1 \pm 3}{2}$, $\rightarrow n' = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ou $n'' = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$. Por se tratar da medição de grandezas, considera-se n apenas para os números naturais, de modo que a ordem correspondente a essa área é a segunda superfície quadrada.

No entanto, vale ressaltar que tal modelo não se caracteriza ainda como universal, por não atingir o potencial da fórmula de Bhaskara, uma vez que seus resultados se restringem apenas a duas singularidades numéricas: os naturais e os racionais positivos.

Assim sendo, ficou evidente que o estudo ainda carecia de entendimento a respeito dos conceitos intrínsecos à sua essência conceitual, ou seja, quanto à verificação das abstrações que ascendem ao processo de síntese para se chegar ao modelo universal para todas as singularidades numéricas (reais e complexos).

Enfim, tanto na primeira pesquisa (Movimento do pensamento para apropriação do conceito de número nas proposições de ensino davydoviana e brasileiras) quanto na segunda (Organização do ensino de equação do segundo grau conforme as premissas davydovianas), os estudos desenvolvidos nos possibilitaram estabelecer algumas relações, bem como abstraí-las e concretizá-las, no que concerne ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

Desses estudos, produzimos sínteses – com base em Rosental (1962), Kopnin (1958) e Davíдов (1988) – referentes ao processo de apropriação, mais especificamente sobre os conceitos de *concreto* e

*abstrato*¹¹. As decorrentes compreensões foram apenas de ordem conceitual e de indícios do referido movimento. Contudo, elas foram anunciativas da necessidade de continuidade da investigação.

Uma delas é o conceito de abstração como um dos elementos necessários para o desenvolvimento do pensamento, cuja finalidade incide na apropriação do conhecimento verdadeiro da realidade. Isso nos fez pensar sobre a forma e o conteúdo desse movimento, o que nos trouxe novos questionamentos: Quais os elementos – traços característicos – que constituem o movimento do pensamento do abstrato ao concreto? Como esses elementos se manifestam no processo de apropriação do conhecimento científico? Por consequência, formulamos o pressuposto de que tais reflexões contribuiriam para o entendimento desse movimento como processo de apreensão do conhecimento que revela a essência dos fenômenos, a fim de reproduzi-los como sistema conceitual (VIGOTSKI, 2000).

Outra necessidade de continuidade dizia respeito ao movimento de redução do pensamento – do concreto sensível ao concreto abstrato – que, de acordo com Davídov (1988), trata-se também de um movimento indispensável ao processo de apropriação do conhecimento. Isso porque, para elevar o pensamento do concreto sensível ao concreto síntese de múltiplas determinações, o pensamento se move, inicialmente, “[...] das manifestações particulares para sua base universal” (ROSA, 2012, p. 48). A redução à sua base única, sua essência, constitui-se ponto de partida para o movimento posterior, que segue do abstrato ao concreto (ROSENTAL, 1962). Vale esclarecer que esses dois movimentos serão tratados com mais profundidade no segundo capítulo.

Esse contexto de prospectividade foi decisivo para que emergisse a necessidade da presente investigação com vista à compreensão da manifestação do movimento de pensamento expresso na proposição de ensino de Davídov e colaboradores, para apropriação de um sistema conceitual. Nesse âmbito, definimos o **objeto de estudo**: os movimentos de redução e de ascensão do abstrato ao concreto expresso nas tarefas particulares davydovianas.

A escolha pela proposta de ensino davydoviana se justifica, uma vez que as pesquisas de investigadores dos GPEMAHC e TEDMAT, referenciadas neste estudo, anunciam que o modo de organização do ensino de Davídov e seus colaboradores explicita os movimentos de redução e de ascensão. As apropriações se referem aos conceitos científicos, por propiciarem a formação dos processos de abstração e

¹¹ Esses conceitos serão aprofundados no capítulo 2.

generalização, voltados para o desenvolvimento do pensamento teórico, que tem como conteúdo expresso “não só as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária” (KOPNIN, 1978, p. 162).

Além disso, seria inviável a análise dos referidos movimentos em uma proposição de ensino brasileira, visto que o movimento expresso nessas proposições direciona o pensamento no sentido oposto, ou seja, o movimento segue do concreto para o abstrato, isto é, do particular para o geral (ROSA, 2012). Conforme Hobold (2014, p. 60), esse movimento apresenta a seguinte orientação: percepção-representação-conceito, cujo trânsito “inicia pela percepção, passa pela generalização e resulta no conceito”.

Portanto, nossa pesquisa dá continuidade às pesquisas atualmente realizadas pelo GPEMAHC e TEDMAT, mais especificamente àquelas que se voltam à proposta davydoviana para o ensino de Matemática. Dada a abrangência do objeto, indicado em parágrafo anterior, optamos por algumas delimitações que se expressam na formulação do seguinte **problema de pesquisa**: Quais as manifestações do movimento do pensamento – redução e ascensão – nas tarefas particulares do modo davydoviano de organização do ensino, quando colocadas em situação escolar, para a apropriação do sistema conceitual de fração? O pressuposto é que o processo de apropriação contemple o movimento que expressa a lógica conceitual de determinado conhecimento. Ou seja, numa perspectiva davydoviana, entende-se que o pensamento se move mediado por um sistema conceitual, na qual é contemplado pelas tarefas particulares geradoras das condições de origem e desenvolvimento do conceito em estudo. Nesse âmbito, estabelecemos que o **objetivo geral** centrar-se-ia na investigação dos movimentos do pensamento – redução e ascensão – para a apropriação do sistema conceitual de fração, a fim de revelar sua relação universal.

Como os estudos de Rosa (2012), Hobold (2014), Silveira (2015), Búrigo (2015), entre outros, mostram que a proposição davydoviana, ao tratar dos conceitos matemáticos, se preocupa em explicitar sua essência, lei e generalização, fez-se necessária a definição de algumas questões norteadoras: Qual a essência/base geradora do conceito de fração? Qual a lei que expressa o conceito de fração? Como ocorre o processo de generalização do conceito? Esta última só tem sentido se considerarmos as questões anteriores, pois, na lógica dialética, a generalização e a formulação científica dos conceitos não consistem apenas na distinção e delimitação dos caracteres idênticos pertencentes aos fenômenos. Trata-

se de um processo cada vez mais complexo que leva em consideração o “[...] conhecimento da essência, da sujeição às leis no desenvolvimento das coisas, ou seja, uma essência que expressa o fundamental, sujeito à lei em qualquer fenômeno singular” (ROSENTAL, 1962, p. 243)¹².

No entanto, entendemos que se a finalidade do estudo é investigar os movimentos de redução e de ascensão do pensamento para a apropriação do conceito de fração, então só seria possível pela compreensão dos processos de abstração e generalização do conceito.

Por decorrência das questões norteadoras, determinamos novos **objetivos – os específicos** – que consistem em investigar e analisar:

- A relação genética/substancial que determina a essência do conceito de fração;
- As representações que compõem o elemento mediador para reprodução dos nexos essenciais do conceito de fração;
- Os processos de análise e síntese no movimento do pensamento para a abstração e a reprodução do sistema conceitual de fração.

Consideramos premente a explicitação das razões que determinaram a opção por focar o conceito de fração. Elas, basicamente, são decorrentes da leitura de pesquisas que tratam do ensino do conceito de fração/número racional. O intuito era averiguar se tais pesquisas contemplavam ou não os movimentos de redução e ascensão. Para tanto, recorremos ao Banco de Teses da CAPES e à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD. A princípio, ocorreu a seleção de trabalhos defendidos nos últimos cinco anos. Entretanto, foram poucos os estudos encontrados, alguns deles de Mestrado Profissional. Outros apresentavam o conceito de fração no âmbito da investigação de formação e concepção de ensino do professor, mas em seu desenvolvimento marginalizavam o referido conceito matemático.

A opção, então, foi pela leitura dos trabalhos que apresentavam como questão central a discussão conceitual de fração/número racional. Nessa busca, foi possível destacar dois estudos que tinham uma certa aproximação com os nossos interesses investigativos, a fim de justificar a nossa opção: Silva (2011) e Amorim (2007).

¹² [...] conocimiento de la esencia, de la sujeción a leyes en el desarrollo de las cosas, es decir, una esencia que expresa lo fundamental, lo sujeto a ley en cualquier fenómeno singular (ROSENTAL, 1962, p. 243).

Silva (2011) apresenta como tema *O Ensino de Matemática na Escola Pública: Uma (Inter)Invenção Pedagógica no 7º ano com o Conceito de Fração*. Sua investigação consiste na aquisição do conceito de número racional (em sua representação fracionária) por um grupo de estudantes de uma escola pública do município de Guarapari/ES. Conforme o pesquisador, por meio da intervenção, buscou-se instigar nos estudantes a percepção da relação entre fração e outros conceitos, como a relação parte-todo, razão, divisão ou quociente e operador multiplicativo. Além disso, constava de seu intento a promoção da compreensão de estratégias cognitivas que os estudantes adotavam, que os conduzia no processo de (re) descoberta e (re) construção dos diferentes significados de fração. Tal processo acontecia, segundo o autor, por meio da utilização e manipulação de materiais concretos e representações gráficas (SILVA, 2011).

Como resultado, a pesquisa revela a importância do papel do estudante nas tarefas de aprendizagem, que valorizam o seu conhecimento e motivam-no para a participação no desenvolvimento das atividades. Quanto à aquisição do conceito de fração, Silva (2011, p. 205) afirma “que uma sequência de ensino que interfere no contexto cultural e social do aluno fez com que os alunos pudessem compreender alguns significados de fração”. Isso porque a sequência de ensino tinha por base os estudos, as pesquisas e os exemplos presentes nos livros didáticos, além de estabelecer relação, quando possível, com o contexto real e a prática (SILVA, 2011).

Entendemos que o estudo desenvolvido por Silva (2011) contempla as várias significações do conceito de fração, porém a organização da sequência de ensino não deixa explícito o seu movimento conceitual. Afinal, as significações – parte-todo, divisão/quociente, razão, etc. – são propostas aos estudantes de forma fragmentada, sem estabelecer a inter-relação entre os conceitos. Como consequência, o pensamento dos estudantes se volta para as manifestações das relações externas, abstraídas por meio da observação direta de imagens. No entanto, as relações internas – multiplicidade e divisibilidade das grandezas que estão intrínsecas a cada significação – passam a ser desconsideradas no processo de apropriação do referido conceito.

Essa nossa ressalva ao estudo de Silva (2011) tem respaldo em Dávidov (1988, p. 131) ao afirmar que as dependências internas não podem ser observáveis diretamente, pois apenas se revelam [...] nas

mediações, em um sistema, dentro de um todo, em sua formação”¹³. Nas relações internas, expressa-se a conexão geneticamente essencial que constitui o sistema integral de formação do conceito, que aparece na forma de lei como base universal. O caminho percorrido pelo pensamento para a apropriação das leis consiste, primeiramente, em desvendar a relação essencial em certo sistema de estudo. A partir de então, construir sobre sua base a generalização substancial, uma vez que graças a ela se determina o conteúdo geral, do qual se deduz as relações particulares, ou seja, o conceito (DAVÍDOV, 1988).

Amorim (2007) procurou expressar esse movimento do geral para o particular no estudo desenvolvido sobre *Apropriação de Significações do Conceito de Números Racionais: um enfoque Histórico-Cultural*. Apresenta resultados que se aproximam da premissa de Davýdov e colaboradores de que os conceitos matemáticos surgem a partir da relação entre as grandezas, por via do processo de medição.

Na elaboração da sequência de ensino, a autora primou pela utilização do movimento conceitual de estudo proposto por Caraça (2002), que consiste na análise comparativa entre segmentos para explicitar o processo de medição entre grandeza e unidade de medida de mesma espécie. Tal movimento incide em demonstrar a situação em que a unidade de medida não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza que se deseja medir, resultando em uma divisão não exata.

Tal sequência de ensino teve por objetivo propiciar aos estudantes o desenvolvimento de generalizações que contemplassem o lógico-histórico na formação do conceito. Ou seja, levá-los a se apropriarem do conceito em sua totalidade, que considerasse o seu processo de origem e desenvolvimento. No caso do conceito de número racional, o lógico-histórico é apresentado com a ideia de medida (AMORIM, 2007). Vale salientar que, numa perspectiva davydoviana, o número racional é uma singularidade do conceito de número, que resulta da relação (não exata) de medição entre grandezas e unidade de medida. Tanto ele quanto as demais singularidades (natural, negativo, real), de acordo com Davýdov (1982), citado por Rosa (2012, p. 29), apresentam a medida como gênese, isto é, “[...] a gênese do conceito de número natural é a mesma do conceito de número racional: a partir do estudo das grandezas”.

O movimento conceitual proposto por Amorim (2007) na sequência de ensino, mesmo que expressasse a relação geneticamente essencial do conceito (relação entre a grandeza e a unidade de medida),

¹³ [...] em las mediatizaciones, en un sistema, dentro del todo, en su formación (DAVÍDOV, 1988, p. 131).

não direciona o pensamento do estudante para a generalização de um modelo universal. Isso fica explícito ao afirmar que o pensamento sintético se revelava quando – ao se proporem tarefas referentes às operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) – os estudantes “[...] buscavam seu resultado quer por vias da definição como também por representação geométrica com as devidas interpretações” (AMORIM, 2007, p. 150). No entanto, conforme Rosa (2012, p. 56), a relação universal “[...] constitui o aspecto real dos dados transformados e atua como base genética e fonte de todas as propriedades e peculiaridades do objeto integral”, em que se expressa a relação objetiva do universal com o singular, mediada pelo particular.

Nossa investigação buscou, por meio da análise da proposta de ensino davydoviana, aprofundar a compreensão do movimento conceitual de número racional apresentada por Amorim (2007).

É nessa perspectiva que consideramos pertinente o presente estudo, o que nos levou à indicação, na próxima seção, dos processos metodológicos para atingir seus objetivos.

1.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A presente seção se volta à explicitação do modo de organização da pesquisa. Inicialmente, vale destacar a preocupação com o rigor e os encaminhamentos metodológicos adotados na investigação. Tal precaução foi válida, principalmente por se tratar de um estudo de natureza teórica. Além disso, preocupamo-nos com o atendimento ao alerta de Triviños (1987, p. 15) referente à “falta de disciplina intelectual”, entendida como a ausência de coerência entre os suportes teóricos expostos na pesquisa e a prática social. Um dos fatores que tem contribuído para tal divergência é a não compreensão, por parte do investigador, do método que adota em seus estudos (TRIVIÑOS, 1987).

O método também é uma das centralidades em nossa pesquisa, pela preocupação de que sua escolha requer um posicionamento que, por consequência, traz uma concepção de mundo, de homem e de realidade. O pressuposto é que ele subsidia o processo de investigação do objeto de estudo, de modo a compreendê-lo sob o domínio da realidade social, em seu mais atual estágio de desenvolvimento. No caso do conceito de fração, o seu nível mais elaborado no âmbito científico é sua significação como uma singularidade do conceito de número real (CARAÇA, 2002; ALEKSANDROV, 1973; ГОРБОВ et al., 2006). No contexto pedagógico, a organização do seu ensino deveria primar para que os estudantes se apropriem de tal significação (DAVÝDOV, 1982).

A base desse posicionamento está na sua própria opção e na sua característica, qual seja: o método dialético. Por isso, recorremos a Kopnin (1978, p. 96), um dos seus teóricos, para quem o método é “[...] um meio de atividade do homem em que unem num todo as leis objetivas interpretadas com o fim voltado para a apreensão do objeto e a sua transformação”. Nessa perspectiva teórica, a apreensão do objeto se dá pelas mediações das relações concretas da realidade, consideradas em seu processo histórico.

De acordo com Kopnin (1978), o método dialético expressa o movimento do pensamento (concreto ↔ abstrato) para apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos, que são passados de geração em geração. Isso se articula com a afirmação de Davídov e Márkova (1987, p. 321) de que o desenvolvimento do pensamento “se realiza por meio da assimilação (apropriação) pelo indivíduo da experiência histórico-social”¹⁴.

Nesse sentido, Andery (2002) entende que a apropriação dos conceitos está relacionada ao processo de interiorização – passagem da atividade externa em interna – que não ocorre a partir do simples reflexo imediato dos fenômenos (manifestação do objeto aparente), mas se produz no desvelar, no fenômeno, daquilo que lhe é constitutivo. Em outras palavras, consiste na revelação das relações e das conexões essenciais que lhe são intrínsecas e caracterizam o conceito. Para tanto, o processo de apropriação deve contemplar o movimento que expressa a lógica conceitual de sua formação. Não se busca, pois, a reprodução do fenômeno relacionado ao conceito tal como ele se apresenta. Em vez disso, a finalidade consiste na interpretação das leis de transição de um modelo teórico a outro, a fim de descobrir as leis gerais e universais, as quais promovem o movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto (KOPNIN, 1978).

Foi nesse contexto do movimento de apropriação conceitual que analisamos a proposta de ensino elaborada por Davýdov e colaboradores, referente ao conceito de fração. Esse modo de organização de ensino é peculiar ao desenvolvimento da atividade de estudo – que constitui o segundo estágio de desenvolvimento da criança – que se inicia com o ingresso na educação escolarizada. Para tanto, não perdemos de vista a tese de Davýdov (1982) de que o pensamento a ser desenvolvido pelo estudante em processo de estudo é o teórico – mediante a apropriação dos conceitos científicos. Além disso, ficamos atentos ao seu pressuposto de

¹⁴ [...] se realiza a través de la asimilación (apropiación) por el individuo de la experiencia hitórico-social (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 321).

que tal apropriação conceitual só é possível se a atividade de ensino e, por extensão, a atividade de estudo tenham como finalidade o desenvolvimento da tarefa de estudo, suas respectivas ações e tarefas particulares.

Por se tratar de um movimento conceitual – fração – no âmbito de uma organização de ensino, a pesquisa se define na modalidade bibliográfica. Muitos conceitos matemáticos poderiam ser a referência de análise na proposta de ensino de Davýdov, porém a delimitação se fez para o conceito de fração, o que não ocorreu aleatoriamente. A princípio, foi realizado um levantamento nos livros didáticos de Matemática – 1º ao 6º ano – (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ДАВЫДОВ, et al., 2012; ДАВЫДОВ, et al., 2009; ДАВЫЛОВ; ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2011a; ДАВЫДОВ; ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2011b; ГОРБОВ, et al., 2011; ГОРБОВ, et al., 2006; ГОРБОВ, et al., 2007) da referida proposta, dos possíveis conceitos que poderiam ser a base de análise da pesquisa. No entanto, detectamos que alguns deles já foram alvos de estudos por outros pesquisadores: introdução ao número (ROSA, 2012), adição e subtração (ALVES, 2013), multiplicação (MADEIRA, 2012), divisão (CRESTANI, 2013), introdução à equação do 1º grau (DORIGON, 2013), resolução de problemas (MATOS, 2013), tabuada (HOBOLD, 2014), sistema de numeração (SILVEIRA, 2012; 2015). Esses conceitos são tratados nos livros didáticos – da referida proposta – do 1º, 2º, 3º e 4º ano. Por isso, delimitamos para um conceito – fração – que continuasse com a sequência desses estudos, não só em relação ao ano escolar, como também em termos de conceito matemático. Isso significa dizer que os dados de análise consistem em fontes bibliográficas – referentes ao sistema conceitual de fração apresentado na proposta davydoviana, definidas nas seguintes obras: livro didático (ГОРБОВ et al., 2011) e livro de orientação do professor (ГОРБОВ et al., 2006).

Preliminarmente, ocorreu a identificação das tarefas que tratam do conceito matemático, foco da pesquisa, a partir dos sumários dos referidos livros. Nessa busca, houve a identificação de que o conceito de fração aparece tangencialmente no livro didático do 4º ano, sem uma orientação detalhada para o seu desenvolvimento. Por isso, tomamos como referência o livro didático do 5º ano, especificamente o capítulo VIII, intitulado “Fração Ordinária”, por trazer um conjunto de tarefas particulares que explicitam a necessidade de um novo procedimento de medição que levará à introdução do referido conceito, o qual se estende no livro didático do 6º ano. Também é no livro de orientação ao professor, correspondente ao 5º ano, que aparece um detalhamento de como conduzir o processo de desenvolvimento das tarefas para que os

estudantes se apropriem do conteúdo essencial do referido conceito. Nas palavras de Гопбoв et al. (2006, p. 120): “[...] fração ordinária é a chave para o entendimento do curso de matemática do quinto ano”.

Convém esclarecer que detemo-nos nas tarefas que introduzem o conceito e possibilitam a elaboração do modelo universal da fração. Isso significa dizer que não adentramos na análise das operações e suas propriedades.

As duas obras analisadas estão escritas no idioma russo, o que tornou necessária a tradução para a língua portuguesa. Para tanto, adotamos alguns procedimentos. Inicialmente, traduzimos o livro didático com o auxílio da ferramenta “Google tradutor”. Mesmo não dominando a referida língua estrangeira, a versão obtida foi passível de entendimento, pois, além de serem pequenos enunciados das tarefas particulares, predominava o teor matemático (algébrico, aritmético e geométrico). Isso não significa que a adotamos como referência principal da análise. Em vez disso, o objetivo foi uma tomada da situação como um modo de vislumbrarmos os caminhos da proposta. Em seguida, foi feita a tradução do livro de orientação do professor por uma equipe de tradutores oficiais¹⁵, que permitiu a confiabilidade da tradução do livro didático.

Posteriormente, realizamos o estudo das tarefas particulares, a fim de selecionar aquelas que representavam a totalidade do sistema conceitual de fração. Para tanto, reproduzimo-las por meio da ferramenta (PowerPoint) com a animação de todos os movimentos referentes ao processo de sua resolução. No processo de análise, estabelecemos um diálogo com os fundamentos filosóficos (ROSENTAL, 1962; KOPNIN, 1978), fundamentos psicológicos e didáticos (DAVÝDOV, 1982; DAVIDOV, 1988, DAVIDOV, 1987) e fundamentos matemáticos (CARAÇA, 2002; ALEKSANDROV, 1973).

Isso permitiu que estabelecêssemos a seguinte unidade de análise: movimento do pensamento do concreto ao abstrato (redução) ↔ movimento do pensamento do abstrato ao concreto (ascensão). Vigotski (2000, p. 8) entende “por unidade um produto da análise que, diferente dos elementos, possui as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade”. Ao focarmos nessa unidade de análise, esforçamo-nos pela articulação dos fundamentos teóricos com o objeto de estudo, como forma de garantir o essencial que Vigotski (2000, p. 9) denomina de “uma generalização da realidade estudada”.

¹⁵ A tradução foi realizada por um grupo de professores russos, residentes em São Paulo, que fazem parte do Clube Eslavo (<http://www.cursorusso.com.br/>).

No entanto, para a análise dos dois movimentos explicitados no problema de pesquisa, fez-se necessário o estudo – no segundo capítulo – de alguns conceitos que seriam centrais para o seu entendimento, quais sejam: concreto/abstrato; a relação universal/particular/singular; abstração/generalização e procedimento de análise/síntese.

Desse modo, a unidade cumpriu a finalidade de análise do conteúdo, objetivo intrínseco nas relações e conexões externas e internas, que constituem o objeto de estudo, para apreensão em sua totalidade.

2 O MOVIMENTO DO PENSAMENTO NA LÓGICA DIALÉTICA E A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO EM DAVÝDOV

No presente capítulo, a preocupação se volta para as questões teóricas/filosóficas sobre o movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto, bem como para a investigação da sua expressão no modo de organização de ensino de Davýdov e colaboradores. Para tanto, dedicamos a ela duas seções. A primeira consiste na investigação, com base na literatura pertinente, da unidade entre o abstrato e o concreto — categorias da lógica dialética — que expressam o movimento do pensamento como reflexo da realidade na consciência humana.

A segunda seção apresenta os fundamentos pedagógicos do modo de organização do ensino proposto por Davýdov e colaboradores, isto é, os pressupostos teóricos pertinentes ao objeto de pesquisa.

2.1 O PENSAMENTO DIALÉTICO: UNIDADE ENTRE O ABSTRATO E O CONCRETO

A presente seção tem por objetivo explicitar o processo teórico pertinente à apropriação do objeto de investigação. Trata, pois, de apontar as bases dos movimentos de redução e de ascensão do abstrato ao concreto que caracterizarão a unidade de análise. Em outros termos, traz os fundamentos para analisar, no terceiro capítulo, as tarefas particulares davydovianas, na especificidade do conceito de fração referente ao 5º ano.

Importante ressaltar que a discussão empreendida nesta seção se volta para a reflexão da unidade entre o abstrato e o concreto no processo de pensamento. Isso porque pressupomos que para investigar a manifestação desses dois movimentos — redução e ascensão do abstrato ao concreto — no contexto das tarefas particulares referentes ao sistema conceitual de fração¹⁶, faz-se necessário o conhecimento de sua estrutura. Em outras palavras, buscar o conhecimento dos elementos que são responsáveis pelo seu desenvolvimento.

Para tanto, realizamos o estudo da literatura que direciona para a compreensão do pensamento numa concepção materialista histórica e dialética. Dentre os autores que se fundamentam nessa perspectiva teórica citamos: Rosental (1956; 1962), Kopnin (1958; 1978), Kosik (1995), Davýdov (1988), entre outros. Ou seja, esses autores fazem referência ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto. Eles partem do

¹⁶ O movimento conceitual da fração será tratado no terceiro capítulo, que se refere à análise das tarefas particulares do sistema de ensino davydoviano.

entendimento de que o movimento em questão consiste no método dialético de apreensão da realidade objetiva. Tal movimento possibilita, no processo de pensamento, a revelação das propriedades e das leis gerais que regem os fenômenos da natureza e da sociedade (KOPNIN, 1978).

Vale antecipar que os autores, ao se referirem ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto, compreendem que ele se inicia a partir do movimento de redução do concreto ao abstrato¹⁷. De acordo com Rosental (1962, p. 485), somente após ter encontrado, por via da abstração, a relação “[...] que constituí a base essencial e a unidade de todas as manifestações da coisa dada, começa o processo de ascensão que leva deste momento abstrato para o concreto”¹⁸.

Para Kopnin (1978, p. 85), o movimento do abstrato ao concreto não é nada mais que “[...] um meio de obtenção da autêntica objetividade no conhecimento”. Isso significa dizer que, no processo do pensamento, o conteúdo do conhecimento coincide com o objeto, de modo que no pensamento são refletidas as próprias formas da realidade objetiva. O autor assinala que a coincidência entre o reflexo da coisa e ela em si (objetivada) refere-se a um conhecimento complexo, que pode tornar-se inacessível sua compreensão, se tomada na relação imediata.

De acordo com Kopnin (1978, p. 127), quando pensamos sobre determinado objeto, “[...] operamos com a imagem ideal do objeto e não com o próprio objeto”. A imagem ideal existe como reflexo captado na forma sensorial-material, isto é, abstração das propriedades e características do objeto real. No entanto, mesmo que decorresse de uma base sensorial, o reflexo não é uma cópia do objeto material, uma vez que ele não possui as propriedades que são próprias dos corpos. Tais propriedades, aspectos e relações referentes ao objeto são fixados pelo pensamento em sua forma subjetiva.

Segundo Kopnin (1978, p. 179), na relação entre sujeito e objeto, o ideal e o material expressam as contradições no pensamento que o torna “[...] tanto subjetivo quanto objetivo”. É subjetivo à medida que

[...] não pode ultrapassar os limites da subjetividade no sentido que pertence sempre ao

¹⁷ Para Rosental (1962) e Kopnin (1978), o movimento de redução é entendido como processo analítico do pensamento. Ou seja, por meio da análise são abstraídos os indícios e as propriedades que revelam a essência da coisa.

¹⁸ “[...] que constituye la base esencial y la unidad de todas las manifestaciones de la cosa dada, comienza el proceso de ascensión que lleva de este momento abstrato hasta lo concreto (ROSENTAL, 1962, p. 485).

sujeito, ao homem social, e cria apenas a imagem e não a própria coisa objetiva. Ao mesmo tempo, o pensamento é objetivo porquanto se desenvolve pela via da criação de uma imagem ideal que reflete o objeto com plenitude e precisão; por conteúdo, procura ser adequado à coisa objetiva, descobrir as propriedades do objeto tais como elas existem independente do pensamento (KOPNIN, 1978, p. 127).

O pensamento atua como processo de unificação das contradições surgidas nas relações entre o sujeito e o objeto que, por sua vez, “[...] resulta na criação de uma imagem subjetiva do mundo objetivo” (KOPNIN, 1978, p. 126). Kosik (1995), assim como Kopnin (1978), afirma que a imagem refletida do objeto, compreendida no conjunto de suas propriedades, não se manifesta imediatamente ao homem. O desenvolvimento da cognição requer um processo mediado – por instrumentos, conhecimentos e outros – que possibilita a apreensão do movimento de transformação dos fenômenos. Em outras palavras, o pensamento, em seu processo de desenvolvimento, apreende o objeto em seu peculiar movimento. Segundo Kopnin (1978, p. 127),

O movimento do próprio objeto está relacionado com a mudança de sua natureza material, uma forma de movimento da matéria que converte-se em outra ou algum objeto se transforma em outro objeto com outras propriedades materiais. O desenvolvimento do pensamento leva à substituição de uma imagem cognitiva por outra, à transição do desconhecimento ao conhecimento, do conhecimento superficial ao unilateral do objeto ao conhecimento profundo e multilateral.

Desse modo, tanto o objeto (matéria) quanto a sua imagem cognitiva refletida se encontram em movimento. A transformação da matéria implica num novo reflexo, num novo nível de conhecimento do objeto. Assim sendo, o pensamento como atividade intelectual e teórica do homem, permite a abstração das transformações do objeto, mediante o movimento do pensamento do abstrato ao concreto. Esse movimento não só reflete as propriedades multilaterais do objeto, como expressa as leis dessas mudanças, que são intrínsecas à história de seu desenvolvimento (KOPNIN, 1978).

O abstrato e o concreto, na lógica dialética, são considerados categorias fundamentais para o processo de apropriação do conhecimento científico. Eles surgem da necessidade de compreender profundamente o processo de cognição, pois permitem a apreensão dialética do reflexo da realidade na consciência humana (KOPNIN, 1978). O processo de apreensão do reflexo da natureza pelo homem se constituiu no problema fundamental da filosofia, ao longo do seu desenvolvimento histórico.

Para Kopnin (1978), a filosofia marxista foi quem contribuiu para o entendimento da unidade entre as leis do pensamento e as leis do mundo objetivo. Portanto, essa base filosófica se diferencia de outras concepções (positivistas, naturalistas, kantiana, entre outras) que desmembram sujeito e objeto, estudando-os de forma isolada. Algumas delas até admitem a coexistência entre ambos, mas não os consideram como fundantes de sua existência enquanto objetividade. Para a solução desse problema, a lógica dialética materialista¹⁹ toma por base o reconhecimento do princípio do reflexo, ou seja, a atividade prática-sensorial como “[...] a base imediata do surgimento de todas as faculdades intelectuais, inclusive do próprio pensamento” (KOPNIN, 1978, p. 50).

A atividade prática apresenta como resultado imediato o conhecimento sensível da realidade, cuja assimilação pelo homem possibilita o conhecimento do objeto em seus aspectos externos, isto é, suas propriedades e características dadas aos órgãos dos sentidos. Segundo Rosental (1956, p. 49), as percepções sensoriais são a base para apropriação do conhecimento de qualquer objeto, uma vez que “[...] só podemos pensar sobre determinado objeto se já o conhecemos”.

Entretanto, o reconhecimento da atividade prática, como fonte geradora (ponto de partida) do processo de desenvolvimento do pensamento, não se reduz apenas ao reflexo do espelhamento ou cópia mecânica do objeto dado à percepção. O reflexo consiste no

[...] resultado da atividade subjetiva que parte da fonte objetiva e conduz à imagem cognitiva, superando por conteúdo qualquer objeto ou processo tomado separadamente. Só sob essa concepção do reflexo pode-se entender porque o conhecimento se converte em instrumento da

¹⁹ A dialética materialista “[...] é justamente a filosofia que *rejeita* igualmente a *escolástica da metafísica especulativa* e o *positivismo*”. O materialismo dialético trata-se da filosofia que “[...] não divorcia o método do pensamento das leis do movimento dos fenômenos do mundo objetivo” (KOPNIN, 1978, p. 57, grifos do autor).

atividade prática transformadora do homem
(KOPNIN, 1978, p. 124).

Para Leontiev (2004), todo reflexo psíquico decorre da interação entre o sujeito e objeto, mediada pela ação prática e intencional do homem sobre a natureza que, ao modificá-la, permite a transformação da sua própria realidade. Conforme Kosik (1995), essa relação mútua de transformação ocorre e se desenvolve por meio da práxis que, por sua vez, se explicita na atividade exercida pelo homem – o trabalho – na busca pela satisfação das necessidades materiais surgidas ao longo de determinado momento histórico. Por consequência, o homem desenvolve sua consciência e cria a realidade humano-social como unidade de existência e de significados (KOSIK, 1995). Isso quer dizer que o homem, na atividade de trabalho, cria os instrumentos para atender às suas necessidades elementares (vestimentas, alimentação, entre outros). Ao utilizá-los, também produz ideias e representações que refletem o objeto em suas propriedades objetivas (produzidas), que possibilita-lhe a aquisição da experiência e da prática social (LEONTIEV, 2004).

Isso significa que a concepção materialista e dialética adota como premissa que o conhecimento tem sua gênese na atividade transformadora do homem. Ele surge e se desenvolve mediante a ação humana, como meio de satisfação de determinadas necessidades sociais.

Como mencionado anteriormente, as percepções sensoriais consistem na etapa inicial para se alcançar o conhecimento do objeto. No entanto, quaisquer que sejam as sensações, obtidas pela atividade perceptiva, não se caracterizam como única forma de conhecimento, uma vez que nem tudo que se apresenta aos órgãos dos sentidos revela o conhecimento verdadeiro da coisa em si (KOSIK, 1995). Por exemplo, o geocentrismo – em que os antigos filósofos admitiam que a Terra era o centro do universo e os astros giravam entorno dela – foi uma constatação obtida pela observação do movimento dos astros.

A imagem sensorial captada como reflexo imediato da realidade, segundo Rosental (1956), encontra-se imbuída de aspectos essenciais e não essenciais, importantes e não importantes do objeto. Por meio da observação e da contemplação, torna-se possível identificar e distinguir certos indícios do objeto. Porém, esses processos que se desenvolvem de imediato não possibilitam a compreensão de sua estrutura, de sua formação. O autor ressalta que, ao se considerar somente os aspectos encontrados na aparência dos fenômenos, pouco se teria avançado acerca do conhecimento da realidade e da sociedade.

No entanto, não se pode perder de vista que o conhecimento sensível nos fornece o material necessário para apreensão do objeto. Porém, por si só, ele é insuficiente para a interpretação da realidade tal como se objetiva (ROSENTAL, 1956). Por exemplo, o olfato constitui um dos órgãos dos sentidos que permite contato imediato com o objeto. Por meio do cheiro, conseguimos perceber a diversidade de odores e os distinguimos em aromas. Mas somente com a percepção dada pelo olfato não se pode conhecer que os odores são formados por partículas distintas que, captadas pelas células olfativas, levam a informação ao cérebro, que as abstrai em sensação de aroma (CLASSEN; HOWES; SYNNOTT, 2002).

Rosental (1956) chama a atenção para a limitação das percepções sensíveis no processo de apreensão do objeto, uma vez que elas refletem apenas o fenômeno em seus aspectos isolados, soltos. Além disso, o autor destaca que tal conhecimento, tomado isoladamente no processo de apropriação, pode nos conduzir ao erro no momento de “[...] determinarmos sua característica principal, essencial” (ROSENTAL, 1956, p. 60). Por isso, não considera o conhecimento sensível como o fim do processo, pois nele não esgota o conhecimento dos aspectos essenciais que determinam a existência do objeto/fenômeno.

As colocações apontadas por Rosental (1956) direcionam para o entendimento de que o processo do conhecimento consiste em apreender as propriedades internas que se encontram ocultas no objeto. Ou seja, aquelas que revelam as causas do seu surgimento e da sua existência. O conhecimento das causas é indispensável para os homens, uma vez que “sem conhecer as causas dos diferentes acontecimentos sociais, os homens não poderiam orientar-se em sua atividade” (ROSENTAL, 1956, p. 69).

A partir da reflexão acerca do desenvolvimento do conhecimento, surgiu-nos o seguinte questionamento: Como apreendemos as causas dos fenômenos? Em busca da resposta à referida questão, subsidiamo-nos em Rosental (1956), ao dizer que o pensamento é a via pela qual se revelam as interdependências causais internas, que manifestam com exatidão o objeto. Isso porque, segundo o autor, o pensamento permite que penetremos no conhecimento mais profundo das coisas e destaquemos “[...] nos objetos os seus aspectos essenciais e não essenciais, distinguimos o lado exterior, frequentemente enganoso, do interior, que é o mais importante e decisivo” (ROSENTAL, 1956, p. 58).

Para Rosental (1956), o pensamento é uma atividade que possibilita a elevação do conhecimento sensível (forma inferior) a um grau mais complexo do conhecimento (forma superior). Isso ocorre

porque o homem não reduz o processo de pensamento às sensações imediatas, mas as toma como ponto de partida para apreensão dos fenômenos, tendo por finalidade a compreensão das leis que os regem, os constituem.

Conforme Kopnin (1978), Rosental (1962), Davídov (1988) e Davýdov (1982), as propriedades do objeto e fenômenos e suas conexões tornam-se compreensíveis ao homem por meio do movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto. Nas palavras de Marx, citado por Kopnin (1978, p. 85), o movimento de ascensão consiste em “[...] um meio pelo qual o pensamento apreende o concreto e o reproduz como espiritualmente concreto”. O método dialético do pensamento orienta o processo de cognição na busca da revelação das leis do movimento dos objetos e processos. Kopnin (1978) propõe uma certa exigência para que o conhecimento se constitua como mediador no processo de assimilação da prática e dos objetos: possuir e refletir em seu conteúdo as propriedades e leis da realidade objetiva. Portanto, não se trata de apenas perceber as coisas tal como se apresentam na natureza, mas como resultado da nossa atividade prática.

Kopnin (1958, p. 313) entende que, no movimento de ascensão do abstrato ao concreto, “não se cria o objeto concreto mesmo, que já existia antes e independentemente de ser conhecido; o que surge é o conceito concreto dele”²⁰. Para Davídov (1988), só mediante a análise do conteúdo do fenômeno tomado em seu processo de desenvolvimento é que o pensamento pode manifestar sua essência, de modo que reflita os nexos essenciais que se encontram intrínsecos no processo de formação. Por consequência, a revelação da essência expressa a universalidade do fenômeno que leva o pensamento à reprodução do concreto em sua integridade. Segundo Rosental (1962, p. 474), o concreto como integridade se constitui

[...] na multiplicidade de suas propriedades e determinações, na interação de todos os seus aspectos e partes. Toda coisa possui numerosas facetas [aspectos] e partes e existe apenas como integridade na diversidade de suas manifestações, diversidade em que todos os seus elementos estão

²⁰ [...] no se crea el objeto concreto mismo, que ya existía antes e independentemente de que fuera conocido; o que surge es el concepto concreto de él (KOPNIN, 1958, p. 313).

concatenados entre si e se condicionam reciprocamente.²¹

Nesse sentido, Davídov (1988) ressalta que a reprodução do objeto como imagem cognitiva em toda sua diversidade consiste na unidade entre o fenômeno e a essência, que se expressa no movimento de **redução** e **ascensão** no pensamento. Segundo ele, no processo de redução, o pensamento se eleva do concreto ao abstrato para revelar, por meio de um procedimento analítico, a abstração inicial/substancial²². Por outro lado, o processo de ascensão se orienta no sentido oposto, do abstrato ao concreto, que consiste na “[...] reprodução teórica do concreto real como unidade do diverso [...]” (DAVÍDOV, 1982, p. 331)²³.

Embora ambos os processos – redução e ascensão – se encontrem em unidade, para Davídov (1988), o movimento direcionador que expressa a natureza do pensamento teórico é o processo de ascensão do abstrato ao concreto. Essa forma de pensamento consiste em “[...] elaborar os dados da contemplação e a representação em forma de conceito e com ele reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que geram o concreto dado, expondo sua essência” (DAVÍDOV, 1988, p. 142)²⁴. Desse modo, o processo de redução, no movimento do pensamento orientado para apropriação da realidade objetiva, apresenta-se apenas como momento subordinado, como meio para alcançar essa finalidade. Assim sendo, o processo de apropriação incide no movimento do pensamento que segue do concreto sensível (ponto de partida) ao abstrato e, deste, ao concreto pensado (ponto de chegada) (DAVÍDOV, 1988).

²¹ [...] en la multiplicidad de sus propiedades y determinaciones, en la interacción de todo sus aspectos y partes. Toda cosa posee numerosas facetas y partes y existe sólo como integridad en la diversidad de sus manifestaciones, diversidad en que todo sus elementos se hallan concatenados entre sí y se condicionan recíprocamente (ROSENTHAL, 1962, p. 474).

²² Davídov (1988, p. 147) atribuí o termo substancial a abstração inicial, uma vez que ela se apresenta como “[...] carácter de universalidade, que aparece como base genética del todo estudiado”.

²³ [...] reproducción teórica de lo concreto real como unidad de lo diverso [...] (DAVÍDOV, 1982, p. 331).

²⁴ [...] elaborar los datos de la contemplación y la representación en forma de concepto y con ello reproducir omnilateralmente el sistema de conexiones internas que generan lo concreto dado, poner al descubierto su esencia (DAVÍDOV, 1988, p. 142).

Na busca pela compreensão dos dois movimentos citados anteriormente, refazemos as questões realizadas no capítulo anterior: Quais os elementos – traços característicos – que constituem os movimentos de redução e ascensão do pensamento? Como esses elementos se manifestam no processo de apropriação do conhecimento científico? A partir dos estudos realizados, com base na literatura pertinente, identificamos alguns traços característicos concernentes aos movimentos de redução e de ascensão. Tais elementos se expressam nos respectivos conceitos: concreto e abstrato, processo de análise e síntese, essência e fenômeno, abstração e generalização, entre outros.

Pressupomos que a investigação desses conceitos possa nos levar ao entendimento dos respectivos movimentos, bem como subsidiarão na análise das tarefas particulares referentes ao conceito de fração, expressas na proposição davydoviana.

No que se refere ao processo de apropriação, o concreto se reflete duas vezes: como concreto sensível e como concreto pensado. O concreto sensível (sensorial) consiste na “percepção sensível e imediata” do conhecimento que dirige o pensamento para a apropriação das propriedades e características externas de determinado objeto (KOPNIN, 1958, p. 316)²⁵.

Considerado como ponto de partida, trata-se do conhecimento difuso, uma vez que obtido imediatamente pela atividade perceptiva não permite apreendermos o conhecimento das características internas inerentes à própria formação do concreto. Contudo, por meio de mediações, o pensamento ascende às abstrações, de modo a separar a relação essencial que, pelo processo de síntese, possibilita chegar ao concreto pensado.

Por sua vez, o concreto pensado consiste na imagem cognitiva do objeto, que “[...] reflete o fato objetivo de que os fenômenos e objetos da realidade existem em uma unidade, como um todo composto de diferentes aspectos, qualidades e relações” (KOPNIN, 1958, p. 298)²⁶. Considerado ponto de chegada, trata-se não mais do concreto perceptível, mas do concreto mental. Este último resulta no conhecimento que expressa o movimento de desenvolvimento do objeto, o qual, por meio do processo de cognição, possibilita a apreensão das relações internas que conduzem à revelação de sua essência, sua lei. Conforme Rosental (1962, p. 483),

²⁵ percepción sensible e inmediata [...] (KOPNIN, 1958, p. 316).

²⁶ [...] refleja el hecho objetivo de que los fenómenos y objetos de la realidad existen en una unidad, como un todo compuesto de diferentes aspectos, cualidades y relaciones (KOPNIN, 1958, p. 298).

“o concreto mentalmente reproduzido aparece já não em forma de soma de diversos dados, observações, atos, proposições separadas, etc., mas como um conhecimento sobre fenômeno iluminado por uma ideia única”²⁷.

Assim sendo, o concreto no movimento do pensamento orientado para apreensão da realidade objetiva não consiste apenas na integridade de um fenômeno isolado, mas na integridade dos nexos e relações do fenômeno com outros fenômenos, de suas concatenações naturais com as condições em que existem (ROSENTAL, 1962).

Para Kopnin (1958), tanto o concreto quanto o abstrato são categorias que atuam no processo de cognição como momentos do pensamento, voltados para a apreensão do mundo objetivo. Contudo, o autor ressalta, ainda, que esse processo não ocorre de forma linear, mas ocorre no movimento dialético em que ambos os momentos são compreendidos em unidade.

Conforme Rosental (1962), a unidade corresponde à correlação entre o abstrato e o concreto, na qual se expressam as contradições do pensamento na busca de conhecer aquilo que o fenômeno apresenta de concreto. Nesse caso, considera-se o concreto não apenas como o reflexo imediato do objeto no pensamento, mas como a imagem cognitiva, síntese resultante da combinação de numerosas abstrações que refletem sua lei de constituição.

Vale salientar que o movimento que segue do concreto sensorial ao concreto pensado passa pelas abstrações. Estas, de acordo com Kopnin (1978, p. 159), “[...] não substituem a contemplação viva, mas é como se a continuassem, atingem um novo degrau qualitativamente diverso no movimento do conhecimento”. Por meio da abstração, o pensamento não apenas separa os indícios que há de comum entre os objetos analisados, mas também atua na revelação dos aspectos essenciais, da qual se constitui a lei que expressa o seu desenvolvimento (KOPNIN, 1978).

Na perspectiva dialética, o processo investigativo deve se orientar na busca pela apropriação dos nexos e nas relações essenciais do objeto, a fim de encontrar a base genética/geradora do conceito. Ou seja, não se limitar apenas à investigação de conceitos prontos e estáticos (ROSENTAL, 1962).

²⁷ Lo concreto mentalmente reproducido aparece ya no en forma de suma de diversos datos, observaciones, hechos, proposiciones separadas, etc., sino como un saber sobre fenómenos iluminado por una idea única (ROSENTAL, 1962, p. 483).

Portanto, o processo investigativo considera a análise do objeto em seu processo de desenvolvimento e transformações, a fim de revelar sua essência. Para Rosental (1962), chegar ao conhecimento da essência requer a realização de um procedimento que apreenda as contradições internas do fenômeno, pois elas constituem a fonte de seu desenvolvimento, visto que se trata de um processo difícil e complicado, uma vez que a essência não se apresenta imediatamente no fenômeno.

Tal restrição leva-nos ao seguinte questionamento: Como a relação essencial, que se encontra invisível no concreto sensível, é revelada e elevada ao plano mental? Antes de explicitarmos o entendimento sobre o movimento inerente à revelação da essência por via do pensamento, parece-nos providencial respondermos, brevemente, outras duas questões: O que é essência? Qual a sua relação com fenômeno?

Segundo Sternin (1958), a essência consiste no aspecto interno da realidade que expressa o nexo profundo entre os fenômenos. Isto é, aquilo que permanece estável ao se investigar os fenômenos e os diversos caminhos e processos de seu desenvolvimento, tomados na relação com os outros fenômenos.

Para o materialismo dialético, a essência e o fenômeno são dois aspectos indissolivelmente vinculados da realidade objetiva; um deles, o aspecto interno (a essência) não pode manifestar-se senão através do aspecto externo (o fenômeno). Agora bem, os dois aspectos não coincidem nunca plenamente no modo de manifestar-se, e é precisamente esta falta de coincidência o que faz necessário o processo mesmo do conhecimento científico. Com efeito, a ciência não tem outro fim que descobrir detrás do externo, detrás do que se percebe imediatamente, o fundamento, a essência das coisas; ou seja, o outro aspecto, o aspecto oculto e interno (SAOSEROV, 1958, p. 55)²⁸.

²⁸ Para el materialismo dialéctico, la esencia y el fenómeno son dos aspectos indisolublemente vinculados de la realidad objetiva; uno de ellos, el aspecto interno (la esencia) no puede manifestarse sino a través del aspecto externo (el fenómeno). Ahora bien, los dos aspectos no coinciden nunca plenamente en el modo de manifestarse, y es precisamente esta falta de coincidencia lo que hace necesario el proceso mismo del conocimiento científico. En efecto, la ciencia no tiene outro fin que el descubrir detrás de lo externo, detrás de lo que se percibe inmediatamente, el fundamento, la esencia de las cosas; es decir, el outro aspecto, el aspecto oculto e interno (SAOSEROV, 1958, p. 55).

Retornemos à questão anterior: Como a essência é revelada e levada ao plano mental? Rosental (1962) chama a atenção para o processo de conhecimento da essência, considerada a base geradora que se revela por meio da generalização, mediante as abstrações de uma quantidade de objetos e fenômenos, a fim de destacar o que é essencial. Este constitui a essência que expressa “[...] o fundamental, o sujeito, a lei em qualquer fenômeno singular” (ROSENTAL, 1962, p. 243)²⁹.

Tal processo de generalização ocorre mediante o procedimento analítico de investigação, que consiste na decomposição de um todo complexo em suas partes (ROSENTAL, 1962). Tal procedimento visa não apenas destacar as características e propriedades externas que compõem o objeto, mas também revelar as contradições internas que se constituem em fonte de seu desenvolvimento.

A função mais profunda da análise reside em proporcionar um conhecimento da coisa em unidade de seus nexos e propriedades, em mostrar o fundamento que os liga em uma unidade e que se revela em qualquer propriedade, em qualquer faceta da coisa (ROSENTAL, 1962, p. 448)³⁰.

Em outras palavras, a tarefa fundamental da análise consiste “[...] na redução das diferenças existentes dentro do todo para a base única que as gera, a sua essência” (DAVÍDOV, 1988, p. 147)³¹. A revelação da essência manifesta a conexão interna que, como fonte única, determina as demais particularidades do todo. Isso significa que para chegar ao conhecimento da essência de um objeto/fenômeno, o pensamento se move por meio de abstrações de distintos graus.

Essas formas de abstrações surgem conforme a interação que se estabelece com o objeto (investigado). Se dada em sua forma imediata, elas possibilitam apenas a apreensão das propriedades e características externas do objeto; trata-se, pois, de “abstrações empíricas” (DAVÍDOV,

²⁹ [...] lo fundamental, lo sujeto a ley en cualquier fenómeno singular (ROSENTAL, 1962, p. 243).

³⁰ La función más profunda del análisis estriba en proporcionar un conocimiento de la cosa en la unidad de sus aspectos y propiedades, en mostrar el fundamento que los enlaza en una unidad y que se revela en cualquier propiedad, en cualquier faceta de la cosa (ROSENTAL, 1962, p. 448).

³¹ en la reducción de las diferencias existentes dentro del todo a la base única que las genera, a su esencia (DAVÍDOV, 1988, p. 147).

1988). Por extensão, obtêm apenas o conhecimento empírico, na qual classifica e descreve o objeto tal como se apresenta.

Por sua vez, o estabelecimento de relações mediatizadas – entre outros conceitos, instrumentos, representações – possibilita o surgimento de abstrações teóricas. Segundo Davýdov (1982, p. 338, grifos do autor), “estas permitem formular as exigências para a definição abstrata **inicial**”³². Pois, por meio dos processos mediados, o pensamento abstrato visa não apenas a separação dos indícios essenciais dos não essenciais, como também a manifestação das conexões internas que se encontram intrínsecas ao objeto, que não podem ser apreendidas no simples olhar direto dos fenômenos.

Rosental (1962, p. 488) assinala que “[...] o objetivo específico da abstração reside, neste caso, em separar, mediante a análise, o aspecto essencial que pode desempenhar o papel da abstração inicial na via ascendente do abstrato para o concreto”³³. Para o autor em referência, a abstração inicial são conceitos que refletem a essência dos fenômenos, extraída das coisas mesmas, dos fenômenos singulares. “A abstração inicial expressa a essência do fenômeno, mas nem sempre completamente. Reflete a essência, a lei dos fenômenos, de maneira abstrata, em seu aspecto puro” (ROSENTAL, 1962, p. 493)³⁴. Ela deve possuir duas qualidades:

- 1) deve refletir o essencial, a causa da coisa, e 2) deve ser uma abstração limite, ou seja, não alcançada de maneira imediata através de outras abstrações, mas, pelo contrário, ela mesma deve servir para que possam chegar a conhecer outras facetas e propriedades dos fenômenos.³⁵ (ROSENTAL, 1962, p. 489).

³² Estas permiten formular las exigencias respecto a la definición abstrata **inicial** (DAVÝDOV, 1982, p. 338).

³³ [...] el objetivo específico de la abstracción estriba, en este caso, en separar, mediante el análisis, el aspecto esencial que pueda desempeñar el papel de abstracción inicial en la vía ascendente de lo abstrato a lo concreto (ROSENTAL, 1962, p. 488).

³⁴ La abstracción inicial expresa la esencia del fenómeno, pero no siempre lo hace por completo. Refleja la esencia, la ley de los fenómenos, de manera abstracta, en su aspecto puro (ROSENTAL, 1962, p. 493).

³⁵ 1) ha de reflejar la esencia, la causa de la cosa, y 2) ha de ser una abstracción límite, es decir, no alcanzada de manera mediata a través de otras abstracciones, sino que, por el contrario, ella misma ha de servir para que puedan llegarse a

Isso significa que, no movimento do concreto ao abstrato (redução), o pensamento busca a revelação da abstração inicial, que expressa tanto a essência do fenômeno quanto o movimento de seu desenvolvimento (sua causa). A abstração inicial torna-se indispensável, uma vez que passa a ser ponto de partida para o movimento posterior do processo de cognição – o movimento de ascensão do abstrato ao concreto. Esse último movimento consiste em, a partir da abstração inicial, elevar o pensamento à reprodução do fenômeno como integridade concreta (ROSENTAL, 1962).

Nesse contexto de estudo sobre os respectivos movimentos do pensamento – redução e ascensão – surgiu-nos o seguinte questionamento: Qual a manifestação do pensamento após alcançar a generalização da essência? Segundo Rosental (1962), o pensamento, ao atingir a generalização da essência, investiga, por via do processo de síntese, o modo que determinada base se manifesta na concreta diversidade de suas partes e propriedades. No procedimento de síntese, ele segue o movimento da abstração inicial para a diversidade dos fenômenos e, conseqüentemente, chega à generalização do conceito. Ou seja, o conceito se insere num sistema conceitual. Conforme Dávidov (1988, p. 148), esse procedimento possibilita a dedução genética dessa base “[...] por meio da recriação do sistema de conexões que reflete o desenvolvimento da essência, a formação do concreto”³⁶.

De acordo com Rosental (1962), os procedimentos de análise e síntese representam, no processo de pensamento, movimentos distintos. A análise parte da investigação dos fenômenos e da experiência para alcançar a abstração inicial. Enquanto que a síntese segue o caminho oposto, pois provém dessa abstração para explicar a diversidade dos fenômenos concretos. Mesmo se tratando de movimentos distintos, ambos encontram-se voltados para o processo de generalização conceitual, que surge por via das abstrações, as quais desempenham um papel importante no processo de cognição. Isso porque o pensamento abstrato tende a descobrir novos aspectos do objeto que traduzam as relações de essência da coisa e do fenômeno (KOPNIN, 1978). Nas palavras de Rosental (1962, p. 479-480), a abstração “[...] não passa de um recurso necessário para que possa cumprir-se o objetivo da cognição:

conocer otras facetas y propiedades de los fenómenos (ROSENTAL, 1962, p. 489).

³⁶ [...] por medio de la recreación del sistema de conexiones que refleja el desarrollo de la esencia, la formación de lo concreto (DAVÍDOV, 1988, p. 148).

reproduzir os fenômenos no que têm de concretos, captando seus nexos e relações com outros fenômenos”³⁷.

No processo abstrativo, o pensamento separa a relação essencial que expressa a base fundamental do fenômeno. Por consequência, a identificação das conexões, sujeitas à lei, resultantes dessa relação com os fenômenos singulares, nos possibilita a generalização do conteúdo geral, do qual se deduzem as relações particulares, os conceitos (DAVÍDOV, 1988). Ou seja, o pensamento reproduz o objeto e o sistema de suas relações que expressam sua essência na forma de conceito. De acordo com Davidov (1988, p. 126), o conceito surge “[...] como forma de atividade mental por meio da qual se reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas relações, que em sua unidade refletem a universalidade ou a essência do movimento do objeto material”³⁸.

Nesse aspecto, o movimento da essência se expressa na relação singular, particular e universal, categorias que buscam explicitar a realidade objetiva em forma de conhecimento da realidade. Segundo Sternin (1958), o *universal* encontra-se vinculado à essência que, revelada na forma de lei, expressa o nexo estável, interno, que se repete entre os fenômenos e se configura como universalidade. O *singular* se manifesta nas coisas e nos fenômenos da realidade social e natural. Está, pois, relacionado à casualidade que possui características e propriedades que se assemelham a um determinado grupo. Além disso, o singular passa a ser conhecido em seus traços comuns, quando estabelecida uma relação com outros objetos. O *particular*, por sua vez, é considerado a categoria responsável pela conexão entre as categorias do universal e do singular (STERNIN, 1958).

Essas categorias são consideradas por Davýdov e seus colaboradores fundamentais no processo de organização do ensino, pois possibilitam a compreensão do movimento conceitual de dado objeto de estudo. Por decorrência propícia a apropriação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir da revelação de sua base universal.

³⁷ [...] no pasa de ser um recurso necesario para que pueda cumplirse el objetivo capital de la cognición: reproducir los fenómenos en lo que tienen de concretos, captando sus nexos y relaciones con otros fenómenos (ROSENTAL, 1962, p. 479-480).

³⁸ [...] como la forma de actividad mental por medio de la cual se reproduce el objeto idealizado y el sistema de sus relaciones, que en su unidad reflejan la universalidad o la esencia del movimiento del objeto material (DAVÍDOV, 1988, p. 126).

2.2 O MODO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DAVYDOVIANO

Nesta seção, apresentamos os principais pressupostos e conceitos que orientam a proposta de Davýdov e colaboradores, os quais têm por base o desenvolvimento humano. Nesse sentido, buscamos referência na Teoria Histórico-Cultural, Vygotski, e da Teoria da Atividade, Leontiev. De acordo com Leontiev (2004), o pensamento, na lógica dialética, consiste no reflexo da atividade prática humana. Na relação com os objetos e fenômenos da natureza, o homem, por meio do trabalho, produz tanto na forma material quanto na forma intelectual o resultado de sua atividade. Isso ocorre, conforme o autor, porque o processo de trabalho propicia a antecipação, intencionalmente, do produto em sua mente (na forma de ideias que refletem as propriedades e as características dos objetos). Posteriormente, o resultado previamente idealizado, como imagem cognitiva, é objetivado como produto material. Por meio desses dois processos – idealização e objetivação –, o homem, em sua produção material (objeto), objetiva o conhecimento, produzindo-o na forma de significação.

Para Leontiev (2004, p. 100), a significação consiste no “[...] reflexo generalizado da realidade elaborado pela humanidade e fixado sob a forma de conceitos, de um saber ou mesmo de um saber-fazer [...]”. Isso significa que o conhecimento do mundo circundante apresenta-se ao homem sob a forma de sistemas de significação elaborados historicamente. Tais significações são acumuladas e passadas de uma geração para outra, mediante a assimilação [...] da experiência humana generalizada e refletida” (LEONTIEV, 2004, p. 101). Segundo Davýdov e Márkova (1987, p. 321), a assimilação

[...] é o processo de reprodução, pelo indivíduo, dos procedimentos historicamente formados de transformação dos objetos da realidade circundante, dos tipos de relação em direção a eles e o processo de conversão destes padrões, socialmente elaborados, em forma de «subjetividade» individual³⁹.

³⁹ [...] es el proceso de reproducción, por el individuo, de los procedimientos históricamente formados, de transformación de los objetos de la realidad circundante, de los tipos, de relación hacia ellos y el proceso de conversión de estos patrones, socialmente elaborados, en formas de la «subjetividad» individual (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 321).

Por exemplo, o desenvolvimento da criança decorre da assimilação, por ela, do “[...] desenvolvimento histórico da humanidade, em particular do pensamento e do conhecimento humano” (LEONTIEV, 2004, p. 197). Ao nascer, a criança entra em contato com o mundo à sua volta que, inicialmente, se lhe apresenta como um todo desconhecido. A realidade circundante passa a ser apropriada pela criança na medida em que ela estabelece interação com os objetos e os fenômenos, nos quais estão objetivadas as significações produzidas pela humanidade. Contudo, a formação de capacidades e habilidades psíquicas na criança só é possível mediante “a comunicação prática e verbal”, realizada em relação com os adultos que vivem à sua volta (LEONTIEV, 2004, p. 343).

Isso porque não nascemos dotados de aptidões humanas, mas as desenvolvemos à medida que nos apropriamos dos resultados do desenvolvimento histórico, que são transmitidos culturalmente por meio de um processo conhecido como Educação (LEONTIEV, 2004). De acordo com Longarezi e Franco (2013, p. 94), a educação

[...] pressupõe um processo de formação de transformação de capacidades psíquicas, que fazem do homem um humano em sua plenitude. Nesse sentido, a escola, instituição socialmente definida como espaço de apropriação da cultura, não pode se limitar à transferência do patrimônio cultural, precisa criar mecanismos que possibilitem esse desenvolvimento.

Conforme Davídov (1988), a educação escolar deve direcionar a aprendizagem dos estudantes para o desenvolvimento dos fundamentos do pensamento moderno. Este, por sua vez, com as transformações sociais e a complexificação dos meios de produção, exige do sujeito um domínio do processo de origem e do desenvolvimento das coisas.

Para Davídov (1988, p. 6), a forma de pensamento que propicia o fundamento da cultura atual é o pensamento teórico, cuja essência “[...] trata-se de um procedimento especial com que o homem enfoca a compreensão das coisas e os acontecimentos por via da análise e das condições de sua origem e desenvolvimento”⁴⁰. Esse tipo de pensamento exige a formação, nos estudantes, de abstrações e generalizações do tipo teóricas, que possibilitam a apreensão do conteúdo do pensamento

⁴⁰ [...] se trata de un procedimiento especial con el que el hombre enfoca la comprensión de las cosas y los acontecimientos por vía del análisis de las condiciones de su origen y desarrollo (DAVÍDOV, 1988, p. 6).

teórico, pela apropriação dos conceitos científicos. Estes surgem para o estudante sob a forma de atividade mental, como reprodução ideal do objeto analisado dentro de um sistema de relações, da qual é destacada a unidade que reflete a relação universal, essencial, que expressa o movimento de constituição do objeto (DAVÍDOV, 1988).

No entanto, para elevar o conhecimento dos estudantes, levá-los a se orientarem na informação científica, exige-se do processo educativo mudanças, tanto no método quanto no conteúdo. Isso porque, de acordo com Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 300), “os métodos atuais de ensino escolar não são, como se tem apontado repetidamente, suficientemente eficazes, provocam uma grande desigualdade entre os alunos quanto ao êxito nos estudos [...]”⁴¹. Tais métodos, adotados pela escola tradicional, visa à promoção de um ensino que atende aos interesses da sociedade capitalista, isto é, proporcionar aos estudantes a formação parcial de uma ou outra habilidade.

No modo de organização do ensino tradicional, o conteúdo a ser apropriado pelos estudantes no processo de aprendizagem é o empírico, que se caracteriza pela imediatez das transformações materiais ligadas à atividade prática das pessoas (DAVÍDOV, 1988). Tal conhecimento promove apenas o desenvolvimento do pensamento empírico dos estudantes. Isso porque se limita à observação e à classificação das propriedades externas do objeto que, se consideradas em seu aspecto isolado, não permitem penetrar na relação interna constituinte da essência (a causa de seu desenvolvimento).

Para Davídov (1987), Davídov e Slobódchikov (1991), o pensamento empírico desenvolvido pelos estudantes, por consequência da centralidade nos conceitos empíricos, atende a quatro princípios didáticos da escola tradicional: **o caráter sucessivo, a acessibilidade, o caráter consciente e o caráter visual.**

O **princípio do caráter sucessivo** expressa a coincidência do conteúdo da pré-escola com a escola primária. Conforme observação crítica de Davídov (1987), nesses dois níveis de ensino, a predominância é para apropriação, pelos estudantes, dos conhecimentos cotidianos. Assim sendo, visa à conservação dos conhecimentos recebidos pela criança antes de ingressar na escola.

Davídov (1987, p. 146) assinala que esse princípio é pouco promissor, uma vez que “[...] leva à indistinção entre os conceitos

⁴¹ Los métodos actuales de enseñanza escolar no son, como se há señalado reiteradamente, suficientemente eficaces, provocan una gran desigualdad entre los alumnos en cuanto al éxito en los estudios [...] (DAVÍDOV, 1987, p. 300).

científicos e os cotidianos, à aproximação exagerada entre a atitude propriamente científica e a cotidiana diante das coisas”⁴². Isso ocorre porque, segundo o autor, no decorrer dos anos, os conceitos – a serem desenvolvidos pelo sistema de ensino – mudam e se aperfeiçoam. No entanto, não se considera a mudança interna do conteúdo e o método de ensino. A preocupação se volta para a mudança na quantidade e não a qualidade dos conhecimentos a serem apreendidos pelos estudantes nos anos iniciais em relação àqueles do ensino pré-escolar (DAVÍDOV, 1987).

O **princípio da acessibilidade** subestima a capacidade de aprendizagem da criança. Isso porque em cada etapa do ensino se propõe à criança aquilo que ela já sabe ou tem condições de aprender de imediato. “Mas, quem e quando pode definir com precisão a medida desta capacidade?” (DAVÍDOV, 1987, p. 146)⁴³. Essa medida é tomada pelas exigências sociais, transmitidas pela prática do ensino tradicional. O ensino organizado com base nesse princípio “[...] utiliza unicamente as possibilidades já formadas e presentes na criança” (DAVÍDOV, 1987, 147)⁴⁴

O **princípio de caráter consciente** estabelece que todo conhecimento apresenta-se primeiramente como “abstrações verbais” e, em seguida, cada uma delas “[...] deve ser correlacionada, pela criança, com uma imagem sensorial [...]” para que possa assimilar essa correspondência (DAVÍDOV, 1987, p. 148)⁴⁵. Para verificar o grau de compreensão do conhecimento, recorre-se ao uso de ilustrações (DAVÍDOV, 1987). Por exemplo, o número cinco e sua simbologia estão relacionados à apresentação da ilustração de cinco objetos.

A atenção para o último **princípio, o caráter visual**, se volta para sua fonte de desenvolvimento que consiste na sensibilidade dada a partir da percepção dos objetos para a apreensão do conhecimento. Os fundadores e os partidários desse princípio atribuem a ele o seguinte conteúdo: 1) comparação direta da multiplicidade sensorial; 2) separação

⁴² [...] lleva a la indiferenciación entre los conceptos científicos y los cotidianos, a la aproximación exagerada entre la actitud propriamente científica y la cotidiana ante las cosas (DAVÍDOV, 1987, p. 146).

⁴³ Pero ¿quién y cuándo pudo definir con precisión la medida de esta «capacidad»? (DAVÍDOV, 1987, p. 146).

⁴⁴ utiliza únicamente las posibilidades ya formadas y presentes en el niño (DAVÍDOV, 1987, 147).

⁴⁵ [...] debe ser correlacionada por el niño con una imagen sensorial [...] (DAVÍDOV, 1987, p. 148).

do que há de comum e similar; 3) fixação desse comum numa palavra (conceito); e 4) estabelecimento da dependência do gênero e espécie de tais conceitos (generalização – grupo/classe de objetos) (DAVÍDOV, 1987).

Davidov (1988) afirma que esse tipo de conhecimento, cuja essência tem por base apenas o reflexo das propriedades externas dadas sensorialmente, converte-se em conteúdo do pensamento empírico. Quanto ao pensamento empírico, ele tem sua importância na realização das tarefas cotidianas. Porém, torna-se insuficiente para apropriação dos conhecimentos produzidos pela ciência contemporânea, em seu estágio mais atual de desenvolvimento (DAVÍDOV, 1987).

Ao analisar os princípios da escola tradicional, Davidov (1987) verificou que não mais atendiam às exigências postas pela revolução científica-técnica da época. Isso porque “a orientação unilateral para o pensamento empírico faz com que muitas crianças não recebam na escola os meios e procedimentos do pensamento científico, teórico [...]” (DAVÍDOV, 1987, p. 149)⁴⁶.

Davidov (1987, p. 149) entende que o princípio de caráter científico apenas se declara no ensino tradicional, isto é, compreende-se “[...] em sua forma estreitamente empírica e não em sua verdadeira significação dialética; ou seja, não como procedimento especial de reflexo mental da realidade”⁴⁷. Portanto, não traduz os movimentos de redução do concreto ao abstrato e de ascensão do abstrato ao concreto. Tal procedimento, segundo o autor, requer a formação de abstrações e generalizações não só do tipo empírica, mas também teórica. Nesse sentido, para que ocorra a efetivação desse princípio, faz-se necessário um novo modo de organização do ensino que promova nos estudantes o desenvolvimento do pensamento teórico mediante a apropriação do conhecimento científico.

Para satisfazer essa finalidade, Davidov (1987) propõe novos princípios didáticos a serem adotados na organização do ensino. Ele defende que o ingresso da criança na escola seja marcado pela sua percepção do caráter novo do conteúdo e do método em relação ao vivido

⁴⁶ La orientación unilateral hacia el pensamiento empírico lleva a que muchos niños no reciban en la escuela los medios y procedimientos del pensamiento científico, teórico [...] (DAVÍDOV, 1987, p. 149).

⁴⁷ [...] en forma estrechamente empírica y no en su verdadera significación dialéctica, es decir, no como procedimiento especial de reflejo mental de la realidad por medio de la ascensión de lo abstracto a lo concreto (DAVÍDOV, 1988, p. 149).

na pré-escola. Para tanto, a organização do ensino deve atender às peculiaridades da atividade de estudo, pela qual as crianças “[...] reproduzem em sua consciência o conhecimento historicamente produzido pela humanidade (científico) e expressam nas formas ideais da cultura espiritual” (DAVÍDOV, 1988, p. 174)⁴⁸.

Para se alcançar tal finalidade, o *princípio da acessibilidade* da escola tradicional deve ser substituído pelo **princípio da educação que desenvolve**. Afinal, o objetivo é “[...] desenvolver e criar na criança as condições e premissas do desenvolvimento psíquico que pode ainda faltar nelas do ponto de vista dos padrões e exigências supremas da escola futura” (DAVÍDOV, 1987, p. 151)⁴⁹.

Da mesma forma, ao *princípio de caráter consciente* deve se contrapor o **princípio da atividade**. Isso porque o caráter consciente só se efetiva à medida que a criança, no processo de estudo, não recebe os conhecimentos prontos. Com o desenvolvimento da atividade de estudo, pressupõe-se a apropriação, por parte dela, dos procedimentos que possibilitam a realização das transformações dos objetos, a fim de modelar e recriar as propriedades internas que se convertem em conceito (DAVÍDOV, 1987).

O *princípio do caráter visual*, tão difundido pelo ensino tradicional, Davídov (1987, p. 152) contrapõe com o **princípio do caráter objetal**, que requer

[...] ações específicas que são impensáveis de se efetuar com os objetos para, por um lado, revelar o conteúdo do futuro conceito e, por outro, representar este conteúdo primeiro em forma de modelos conhecidos. Os modelos podem ser materiais, gráficos, verbais⁵⁰.

⁴⁸ [...] reproducen en su conciencia las riquezas teóricas que la humanidad acumuló y expresó en las formas ideales de la cultura espiritual (DAVÍDOV, 1988, p. 174).

⁴⁹ [...] desarrollo y crear en los niños las condiciones y premisas del desarrollo psíquico que pueden aún faltar en ellos desde el punto de vista de las normas, y exigencias supremas, de la escuela futura (DAVÍDOV, 1987, p. 151).

⁵⁰ [...] acciones específicas que es indispensable efectuar con los objetos para, por una parte, revelar el contenido del futuro concepto y, por otra, representar este contenido primario en forma de modelos conocidos. Los modelos pueden ser materiales, gráficos, verbales (DAVÍDOV, 1987, p. 152).

A diferença entre esses dois princípios reside no movimento que expressa o particular e o geral. O princípio de caráter visual segue o movimento do particular para o geral. Nesse movimento, o ponto de partida, no processo de pensamento, consiste na percepção sensorial dada com base apenas na observação. Por meio do processo de comparação de objetos, destaca-se e identifica-se o que há de comum e similar entre eles, que, por decorrência de sua generalização, resulta no próprio conceito (ROSA, 2012). Por sua vez, o princípio de caráter objetual parte do conteúdo geral para as manifestações particulares. No geral, encontra-se o aspecto essencial que possibilita a apreensão do objeto em sua universalidade. A partir do universal, da lei que expressa o movimento de desenvolvimento do objeto, se deduz as particularidades do conceito (ROSENTAL, 1962).

Trazemos, a seguir, um quadro (Quadro 1) comparativo que explicita a distinção entre os princípios didáticos propostos pela escola tradicional e a davýdoviana.

Quadro 1 – Síntese referente aos princípios didáticos propostos pela escola tradicional e os propostos por Davýdov e colaboradores.

PRINCÍPIOS DIDÁTICOS DA ESCOLA TRADICIONAL	PRINCÍPIOS DIDÁTICOS PROPOSTO POR DAVÝDOV E COLABORADORES
<p>Princípio do caráter sucessivo</p> <p>Não há mudança entre os conteúdos a serem desenvolvidos na pré-escola e a escola primária. O conteúdo que permeia esses dois níveis de ensino é o cotidiano.</p>	<p>Princípio do caráter científico</p> <p>Tanto o método quanto o conteúdo se voltam para formação de abstrações e generalizações teóricas, afim de propiciarem o desenvolvimento do pensamento teórico. Para tanto, defende que o ingresso da criança na escola seja marcado pela sua percepção do caráter novo do conteúdo (o científico) e do método em relação ao vivido na pré-escola.</p>
<p>Princípio da acessibilidade</p> <p>Trata-se de colocar a criança, em cada período escolar, diante de situações de aprendizagens que requerem apenas os conhecimentos já apropriados por elas ou que demonstram possibilidades de apropriação.</p>	<p>Princípio da educação que desenvolve</p> <p>Promoção e criação de condições necessárias para o desenvolvimento psíquico de modo prospectivo (DAVÍDOV, 1987). Ou seja, um ensino que possibilite ao estudante a apropriação de novos conceitos.</p>

PRINCÍPIOS DIDÁTICOS DA ESCOLA TRADICIONAL		PRINCÍPIOS DIDÁTICOS PROPOSTO POR DAVÍDOV E COLABORADORES	
Princípio de caráter consciente	O conhecimento a ser apreendido pela criança se reduz na correlação direta entre os significados das palavras com suas respectivas imagens sensoriais.	Princípio da atividade	Trata-se da atividade de estudo, a ser desenvolvida por meio de tarefas e ações de estudo, para a apropriação dos conceitos (DAVÍDOV, 1987).
Princípio do caráter visual	Sua fonte de desenvolvimento consiste na sensibilidade da percepção imediata dos objetos para a apreensão do conhecimento.	Princípio do caráter objetual	Trata da análise do concreto sensorial, realizada por meio de um processo mediatizado, na qual possibilita aos estudantes encontrarem o conteúdo geral do conceito para depois estudar suas manifestações particulares (DAVÍDOV, 1987).

Fonte: Da autora.

Davíдов (1987) pressupõe que a aplicação dos novos princípios (psicodidáticos) na organização do ensino permite a revelação das condições dos meios para a formação do pensamento teórico dos estudantes. Para atender a tais condições, é necessário que se considere “a estruturação do trabalho escolar sobre a base de generalizações teóricas [...]”, que se orienta por outros princípios (DAVÍDOV, 1987, p. 153-154)⁵¹:

1) todos os conceitos que constituem a disciplina escolar dada ou seus principais capítulos devem ser assimilados pelas crianças pela via da análise das condições de sua origem [...]; 2) a assimilação dos conhecimentos de caráter geral e abstratos precede a familiarização com os conhecimentos mais particulares e concretos [...]; 3) no estudo das fontes objetual-materiais de uns ou outros conceitos, os alunos devem, em primeiro lugar, descobrir a conexão geneticamente inicial, geral, que determina o conteúdo e a estrutura do campo de conceitos dados (por exemplo, para todos os conceitos da matemática escolar esta conexão geral são as grandezas [...]; 4) é necessário reproduzir

⁵¹ la estructuración de la labor escolar sobre la base de generalizaciones teóricas [...] (DAVÍDOV, 1987, p. 153).

esta conexão em modelos objetivos, gráficos ou simbólicos especiais que permitam estudar suas propriedades em «forma pura» [...]; 5) tem que formar especialmente nos estudantes as ações objetais por meio das quais eles possam colocar de manifesto no material didático e reproduzir nos modelos a conexão essencial do objeto e logo estudar as propriedades dele [...]; 6) os estudantes devem passar progressivamente e a seu devido tempo das ações objetais para sua realização no plano mental⁵².

Os dados das investigações realizadas por Dávidov (1987) na década de 1980 comprovam que o ensino organizado com base nesses princípios promove as condições necessárias para que os estudantes se apropriem de generalizações teóricas. Tais resultados também justificam a hipótese sobre a perspectiva fundamental da escola futura, “[...] que consiste em formar nos estudantes, desde os anos iniciais, o fundamento do pensamento teórico como capacidade importante da personalidade criativa desenvolvida multilateralmente” (DAVÍDOV, 1987, p. 154)⁵³.

⁵² 1) todos los conceptos que constituyen la disciplina escolar dada o sus principales capítulos deben ser asimilados por los niños por vía del examen de las condiciones de origen [...]; 2) la asimilación de los conocimientos de carácter general y abstracto precede a la familiarización con conocimientos más particulares y concretos [...]; 3) en el estudio de las fuentes objeta-materiales de unos u otros conceptos los alumnos deben, ante todo, descubrir la conexión genéticamente inicial, general, que determina el contenido y la estructura del campo de conceptos dados (por ejemplo, para todos los conceptos de la matemática escolar esta conexión general es la de las magnitudes [...]; 4) es necesario reproducir esta conexión en modelos objetales, gráficos o simbólicos especiales que permitan estudiar sus propiedades en «forma pura» [...]; 5) hay que formar especialmente en los escolares las acciones objetales por medio de las cuales ellos puedan poner de manifiesto en el material didáctico y reproducir en los modelos la conexión esencial del objeto y luego estudiar las propiedades de ella [...]; 6) los escolares deben pasar paulatinamente y a su debido tiempo de las acciones objetales a su realización en el plano mental (DAVÍDOV, 1987, p. 153-154).

⁵³ [...] que consiste en formar en los escolares, desde los grados primarios, el fundamento del pensamiento teórico como capacidad importante de una personalidad creativa desarrollada multilateralmente (DAVÍDOV, 1987, p. 154).

2.2.1 Atividades de estudo e sua estrutura

Nesta subseção, dedicamos à atividade de estudo e à sua estrutura, que, para a Teoria Histórico-Cultural, caracteriza uma fase do desenvolvimento humano. Sua pertinência nesta dissertação é justificada, pois é em atenção a ela que Davýdov e seus colaboradores dedicaram suas investigações por mais de vinte e cinco anos.

Foi para que a criança desenvolvesse a atividade de estudo que eles estabeleceram um novo modo de organização de ensino. Para tal intento, como anunciamos anteriormente, adotaram princípios didáticos distintos daqueles seguidos pelo ensino tradicional. A proposta tinha como tarefa essencial o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes, desde os anos iniciais, que requer a formação de abstrações e generalizações do tipo substanciais (teóricas). São elas, segundo Davýdov (1988), que revelam o conhecimento da essência e o movimento dos fenômenos, bem como possibilitam a apropriação do conhecimento científico, que é condição para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Portanto, é no âmbito da educação escolar que se apresenta a atividade principal, o estudo, direcionadora do desenvolvimento do pensamento criador e autônomo dos estudantes, com base na apropriação do conhecimento científico. Para Davýdov (1988), a estruturação dessa atividade tem correspondência com o método de exposição dos conhecimentos, resultante da investigação dos cientistas. Isso ocorre porque, no processo de estudo, o pensamento do estudante, de certa forma, se assemelha ao raciocínio dos cientistas “[...] que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações e generalizações substanciais e os conceitos teóricos [...]” (DAVÍDOV, 1988, 173)⁵⁴. Essa similaridade, no entanto, não significa que são idênticos, uma vez que os estudantes não criam os conceitos, apenas se apropriam deles durante o desenvolvimento da atividade de estudo. Além disso, com o ingresso na escola, os estudantes começam a “[...] assimilar os rudimentos das formas mais desenvolvidas da consciência social, ou seja, a ciência, a arte, a moral, o direito, os que estão ligados com a consciência e o pensamento teórico das pessoas” (DAVÍDOV, 1988, p. 158)⁵⁵.

⁵⁴ [...] quienes exponen los resultados de sus investigaciones por medio de las abstracciones y generalizaciones sustanciales y los conceptos teóricos [...] (DAVÍDOV, 1988, p. 173).

⁵⁵ [...] assimilar los rudimentos de las formas más desarrolladas de la conciencia social, o sea, la ciencia, el arte, la moral, el derecho, los que están ligados con la conciencia y el pensamiento teóricos de las personas (DAVÍDOV, 1988, p. 158).

Davídov (1988), também afirma que, no processo de estudo,

[...] as crianças reproduzem não apenas os conhecimentos e habilidades correspondentes aos fundamentos das formas de consciência social acima citados, mas também as capacidades, surgidas historicamente, que estão na base da consciência e do pensamento teórico: a reflexão, a análise, o experimento mental. (DAVÍDOV, 1988, p. 158)⁵⁶.

O desenvolvimento de tais habilidades e capacidades é possibilitado, conforme enfatiza Davídov (1988), pela organização do ensino de modo que emergja, entre as crianças, a necessidade da atividade de estudo. Isso porque, conforme Rosa (2012, p. 34), as crianças “[...] não chegam à escola sabendo estudar, ao contrário, isso ocorre mediante um processo de apropriação, previamente organizado” (ROSA, 2012, p. 34).

Davídov (1988) apresenta teoricamente seu modo de organização do ensino que coloca o estudante em atividade de estudo, com a seguinte estrutura: **tarefas de estudo; ações de estudo e tarefas particulares.**

No início da atividade de estudo, as crianças não entendem de maneira autônoma as tarefas de estudo, bem como não têm as condições, mesmo que espontâneas, para o desenvolvimento das ações. Por isso, a proposição de ensino prevê a colaboração do professor com orientações pertinentes às condições de apropriação das ações e à aquisição das correspondentes capacidades que possibilitam a execução da tarefa (DAVÍDOV, 1988).

Segundo Davídov (1988, p. 178-179), a tarefa de estudo proposta pelo professor exige dos estudantes:

1) a análise do material real com o fim de descobrir nele certa relação geral que apresente uma vinculação sujeita à lei com as diferentes manifestações desse material, ou seja, a construção da abstração e da generalização substancias; 2) a

⁵⁶ [...] los niños reproducen no sólo los conocimientos y habilidades correspondientes a los fundamentos de las formas de la conciencia social arriba señaladas [la ciencia, a arte, a moral, o derecho] sino también las capacidades, surgidas históricamente, que están en la base de la conciencia y pensamiento teóricos: la reflexión, el análisis, el experimento mental (DAVÍDOV, 1988, p. 158).

dedução, sobre a base da abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em certo objeto integral, ou seja, a construção de sua “célula” e do objeto mental concreto; 3) o domínio, neste processo analítico e sintético, do procedimento geral de construção do objeto estudado⁵⁷.

As tarefas de estudo assumem um papel fundamental no processo de desenvolvimento do estudante. Isso porque elas “[...] se encontram estreitamente ligadas à generalização substancial (teórica), levam o escolar a dominar as relações generalizadas da área de conhecimentos estudados, a dominar novos procedimentos de ação” (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 324)⁵⁸.

Para Elkonin, citado por Davíдов e Márkova (1987), a tarefa de estudo se diferencia de outras peculiares ao homem pela sua finalidade e seu resultado, pois tem por objetivo a transformação do estudante como sujeito ativo, a fim de que adquira novas capacidades e novos procedimentos de ação, mediante a apropriação dos conceitos científicos.

Nesse âmbito do conceito da tarefa de estudo é que Davíдов (1988, p. 208) estabelece o principal objetivo do ensino de Matemática: “[...] levar os estudantes a compreenderem o mais claramente possível a concepção de número real”⁵⁹. O autor destaca que a assimilação dessa ideia básica se inicia pelo domínio do conceito de grandeza e suas principais propriedades – maior, menor e igual. Elas são reveladas pelos estudantes à medida que estabelecem relações reais com grandezas do tipo: comprimento, volume, massa, entre outras. O conceito de grandeza

⁵⁷ 1) el análisis del material fáctico con el fin de descubrir en él cierta relación general que presenta una vinculación sujeta a ley con las diferentes manifestaciones de este material, es decir, la construcción de la abstracción y de la generalización sustanciales; 2) la deducción, sobre la base de la abstracción y la generalización, de las relaciones particulares del material dado y su unión (síntesis) en cierto objeto integral, es decir, la construcción de su “célula” y del objeto mental concreto; 3) el dominio, en este proceso analítico-sintético, del procedimiento general de construcción del objeto estudiado (DAVÍDOV, 1988, p. 178-179).

⁵⁸ [...] se encuentran estrechamente ligadas con la generalización substancial (teórica), llevan al escolar a dominar as relaciones generalizadas en el área de conocimientos estudiada, a dominar nuevos procedimientos de acción (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 324).

⁵⁹ [...] es llevar a los alumnos a comprender lo más claramente posible la concepción del número real (DAVÍDOV, p. 1988, p. 208).

é introduzido aos estudantes como fundamento geneticamente inicial para ulterior estudo dos tipos de números reais (DAVÍDOV, 1988).

Para tanto, o autor define o seguinte sistema de tarefas de estudos para anos iniciais do ensino escolar:

1) introdução dos estudantes na esfera das relações entre as grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática; 2) demonstração para as crianças da relação múltipla das grandezas como forma geral do número: formação do conceito abstrato de número e da compreensão da inter-relação fundamental entre seus componentes (o número é derivado da relação múltipla das grandezas); 3) introdução sucessiva dos estudantes na área dos diferentes tipos particulares de números (natural, quebrados, negativos): formação dos conceitos sobre estes números como uma das manifestações da relação múltipla geral das grandezas em determinadas condições concretas; 4) demonstração aos alunos do caráter unívoco da estrutura da operação matemática (se conhecido o valor dos elementos da operação se pode determinar univocamente o valor do terceiro elemento): formação da compreensão sobre a inter-relação dos elementos nas ações aritméticas fundamentais (DAVÍDOV, 1988, p. 209)⁶⁰.

Por exemplo, sem desconsiderar as demais, o sistema conceitual de fração – foco de análise na presente investigação – corresponde à

⁶⁰ 1) introducción de los alumnos en las esferas de las relaciones entre las magnitudes: formación del concepto abstracto de magnitud matemática; 2) demostración a los niños de la relación múltiplo de las magnitudes como forma general del número: formación del concepto abstracto de número e de la comprensión de la interrelación fundamental entre sus componentes (el número es derivado de la relación múltiplo de las magnitudes); 3) introducción sucesiva de los escolares en el área de los diferentes tipos particulares de números (naturales, quebrados, negativos): formación de los conceptos sobre estos números como una de las manifestaciones de la relación múltiplo general de las magnitudes en determinadas condiciones concretas; 4) demostración a los alumnos del carácter unívoco de la estructura de la operación matemática (si se conoce el valor de los elementos de la operación se puede determinar univocamente el valor del tercer elemento): formación de la comprensión sobre la interrelación de los elementos en las acciones aritméticas fundamentales.

terceira tarefa de estudo. Nela, de acordo com Hobold (2014), o núcleo é o sistema conceitual de multiplicação e divisão. Segundo Dávidov (1988), o conceito de fração é introduzido mediante situações em que a unidade de medida não cabe no objeto quantidade de vezes inteiras. Isso requer um novo método de medição⁶¹ e, por conseguinte, uma nova representação numérica. Para o autor, o “[...] resultado das ações de medição, que corresponde essas situações de medida, é descrito por meio de um número quebrado” – número racional (DAVÍDOV, 1988, p. 210)⁶².

Para o desenvolvimento de uma tarefa de estudo, é proposto um sistema de tarefas particulares, em consonância com seis ações de estudo:

- 1) transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal, geral, do objeto estudado; 2) modelação da relação universal na unidade das formas objetual, gráfica ou por meio de letras; 3) transformação do modelo da relação [universal] para estudar suas propriedades em “forma pura”; 4) construção do sistema de tarefas particulares para resolver por um procedimento geral; 5) controle sobre o cumprimento das ações anteriores; 6) Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada (DAVÍDOV, 1988, p. 181)⁶³.

⁶¹ A palavra “método” aqui empregada diz respeito ao procedimento de medição das grandezas. Portanto, vale antecipar que adotaremos no decorrer do texto os termos “método antigo” e “método novo” para sermos fiéis a tradução. O termo “método antigo” se refere ao procedimento de medição, até então adotado, para a apropriação dos conceitos de número, multiplicação e divisão. Porquanto que o termo “método novo” diz respeito ao processo de medição a ser ainda apropriado sobre o conceito de fração.

⁶² [...] resultado de las acciones de medición que corresponde a estas situaciones es descrito por medio de número quebrado (DAVÍDOV, 1988, p. 210).

⁶³ 1) transformación de los datos de la tarea con el fin de poner al descubierto la relación universal del objeto estudiado; 2) modelación de la relación diferenciada en forma objetual, gráfica ou por medio de letras [literal]; 3) transformación del modelo de la relación para estudiar sus propiedades en “forma pura”; 4) construcción del sistema de tareas particulares a resolver por un procedimiento general; 5) controle sobre el cumplimiento de las acciones anteriores; 6) evaluación de la asimilación del procedimiento general como resultado de la solución de la tarea de estudio dada (DAVÍDOV, 1988, p. 181).

Vale salientar que, para cada uma dessas ações de estudo, é proposto um sistema de tarefas particulares que, em seu conjunto, muda em conformidade com as condições concretas que se resolve numa ou outra tarefa de estudo. A apreensão de determinados conceitos referentes a quaisquer disciplinas requer ações específicas de estudo (DAVÍDOV, 1985). Isso acontece porque o conhecimento das coisas do qual nos apropriamos surge como resultado das ações com elas. “As ações mesmas, à medida que se formam, se convertem em capacidades, e à medida que se automatizam, em hábitos” (DAVÍDOV, 1987, 304)⁶⁴.

Davidov (1988) desenvolveu uma investigação detalhada sobre as ações de estudo em que destaca algumas de suas características. A primeira ação, que corresponde à transformação dos dados das tarefas de estudo, tem por finalidade descobrir “[...] certa relação universal do objeto dado, o que deve ser refletido no correspondente conceito teórico”. (DAVÍDOV, 1988, p. 182)⁶⁵.

A segunda ação, que consiste na modelação – em forma objetiva, gráfica e literal – procura expressar na forma de modelo a relação universal e essencial de um dado objeto (conceito). No modelo, fixam-se as propriedades e conexões internas do objeto, que possibilita sua análise posterior (DAVÍDOV, 1988).

A terceira ação tem como foco a transformação do modelo universal para o estudo de suas propriedades em forma pura. É durante o seu desenvolvimento que os estudantes adquirem o conhecimento das propriedades presentes na relação universal. “O trabalho com este modelo aparece como processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substancial da relação universal” (DAVÍDOV, 1988, p. 183)⁶⁶.

A quarta ação de estudo se refere à dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares, resolvidas por um procedimento geral. Isso significa dizer que os estudantes a partir da relação essencial/geral deduzem as relações particulares que correspondem à singularidade do objeto estudado (ROSENTAL, 1962), o que explicita o procedimento de síntese.

⁶⁴ Las acciones mismas, a medida que se forman, se convierten en capacidades y, a medida que se automatizan, en hábitos (DAVÍDOV, 1987, p. 304).

⁶⁵ [...] cierta relación universal del objeto dado, el que debe ser reflejado en el correspondiente concepto teórico (DAVÍDOV, 1988, p. 182).

⁶⁶ El trabajo con este modelo aparece como el proceso por el cual se estudian las propiedades de la abstracción sustancial de la relación universal (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

A quinta e a sexta ação se voltam, respectivamente, ao controle e à avaliação da tarefa de estudo. A ação do controle possibilita ao estudante estabelecer relações com outras ações de estudo, a fim de certificar a correta execução das tarefas. A avaliação consiste em verificar a aprendizagem, ou seja, se houve ou não apropriação, por parte do estudante, da tarefa de estudo, mediante a realização das ações (DAVÍDOV, 1988). Essas duas ações se apresentam em qualquer momento do processo de estudo.

Feitas essas considerações a respeito do que consideramos os fundamentos do modo davydoviano de organização do ensino, passaremos ao terceiro capítulo da dissertação. Nele, o esforço foi para a análise voltada à elaboração de possível síntese referente ao problema de pesquisa.

3 INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO EM DAVÝDOV

No presente capítulo, analisamos o movimento de desenvolvimento do pensamento conceitual⁶⁷ de fração proposto pelo modo de organização do ensino de Davýdov e seus colaboradores.

Conforme apresentado nos capítulos anteriores, a proposta davydoviana tem por premissa o desenvolvimento do pensamento teórico, que implica nos movimentos de redução (concreto ao abstrato) e de ascensão (abstrato ao concreto). Tais movimentos, conforme Davýdov (1982) direciona o pensamento dos estudantes para a apropriação dos nexos e das relações essenciais que constituem o conceito. Tratamos, pois, da análise referente ao problema de pesquisa, que reiteramos: Quais as manifestações do movimento do pensamento – redução e ascensão – nas tarefas particulares do modo davydoviano de organização do ensino, quando colocadas em situação escolar, para a apropriação do sistema conceitual de fração? As tarefas particulares, base da análise, estão entre aquelas trazidas pelo livro didático (ГОРБОБ et al., 2011) e pelo livro de orientação do professor (ГОРБОБ et al., 2006) referentes ao 5º ano.

A delimitação ocorreu para algumas tarefas particulares que: introduzem o conceito; possibilitam a elaboração do modelo universal da fração; e revelam a propriedade fundamental. Em outras palavras, são representativas das três primeiras ações de estudo peculiares ao modo de organização do ensino da proposição em foco. Vale lembrar que a organização do ensino proposta por Davýdov e colaboradores apresenta a seguinte estrutura: tarefas de estudo, ações de estudo (em número de seis) e tarefas particulares.

No que se refere à apropriação do conceito de fração, a tarefa de estudo consiste, inicialmente, na apreensão de um novo procedimento de medição, por parte dos estudantes, com base em situações de análise em que a unidade de medida não cabe na grandeza quantidades de vezes inteiras (DAVÍDOV, 1988).

No desenvolvimento das tarefas particulares, a deferência inicial é que os estudantes abstraíam a relação essencial do objeto de estudo, mediante a análise da transformação dos dados apresentados nas tarefas – primeira ação. Por conseguinte, tendo abstraído tal relação por meio dos

⁶⁷ No decorrer do texto utilizaremos as expressões “pensamento conceitual” e “movimento conceitual”. A primeira expressão será adotada quando nos referirmos ao processo de apropriação do conceito. Enquanto, a segunda refere-se ao movimento de constituição do conceito, isto é a lógica de seu desenvolvimento.

modelos – objetual, gráfico e literal – fixam as propriedades internas do conceito e as generalizam na forma de modelo universal, que corresponde à segunda ação (DAVÍDOV, 1988). A partir daí, as tarefas possibilitam que os estudantes procedam algumas transformações no modelo para estudar as propriedades; trata-se de uma referência da terceira ação de estudo.

Essas ideias conceituais referentes ao processo de formação do movimento conceitual tornaram-se base para a análise das tarefas que propiciam o processo de apropriação do sistema conceitual de fração. Isso ocorre no âmbito do que denominamos de unidade de análise, qual seja: o movimento do pensamento do concreto ao abstrato (redução) ↔ movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

É importante enfatizar que na proposição davydoviana de ensino o movimento do pensamento se volta para a apropriação dos nexos internos do conceito que se apresentam no contexto de um sistema conceitual.

3.1 AS TAREFAS GERADORAS DO MOVIMENTO DO CONCRETO AO ABSTRATO DO PENSAMENTO CONCEITUAL

Nesta seção, dedicamo-nos à análise das tarefas particulares que introduzem o movimento conceitual de número racional que, na presente pesquisa, delimitamos especificamente ao conceito de fração. Tais tarefas trazem como características algumas contradições que fazem gerar a necessidade de um novo procedimento de medição. Isso significa dizer que, em seu desenvolvimento, propiciam que os estudantes se percebam em situação de limitações conceituais. Ou seja, os conhecimentos adquiridos até então não dão conta de resolver todas as situações de medição, conseqüentemente, os números carecem de novos significados e novas representações.

Vale esclarecer que nessa etapa do desenvolvimento das tarefas, a fração ainda não se apresenta em sua forma numérica, pois a ênfase nesse momento se volta para a revelação do novo procedimento de medição. Conforme Гопџов et al. (2006, p. 121), a fração “[...] apenas se torna número quando começa a expressar relação entre valores (medidas de quantidades e unidades), isto é, começa a ser percebida não como descrição do procedimento de medida, mas como seu resultado”.

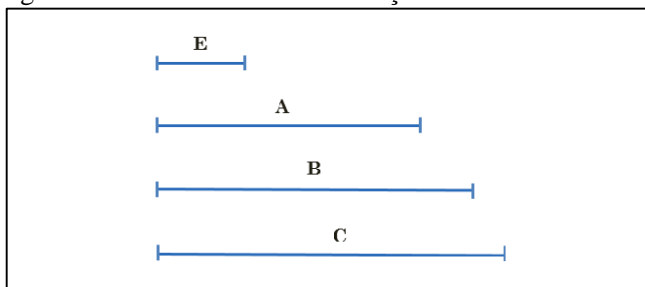
Assim sendo, o ensino da fração inicia-se pela resolução de uma tarefa particular⁶⁸ que consiste na medição de segmentos (A, B e C) com uma determinada unidade de medida (E). Tal tarefa está organizada, conforme Горбов, Микулина e Савельева (2004), de modo que os estudantes percebam que na situação presente não é possível ou torna-se trabalhoso recorrer ao procedimento de medição até então adotado por eles em situações parecidas.

A tarefa 1 apresenta duas situações: *a* e *b*.

Tarefa 1 – Situação *a*

a) Medir o comprimento de A, B e C com a unidade de medida E (Figura 5). Em seguida, verificar na reta numérica os números resultantes (ГОРБОВ et al., 2006).

Figura 5 – Dados referentes à situação *a* da tarefa 1



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

Para a resolução da tarefa, inicialmente, os estudantes deverão escolher um instrumento de medida – barbante, recorte de cartolina, entre outros – como elemento mediador no processo de medição. Tal procedimento torna-se indispensável, pois a simples observação dos dados apresentados na tarefa (os segmentos) não possibilita que os estudantes determinem de imediato o aspecto quantitativo do número que corresponde à medida de cada segmento (ГОРБОВ et al., 2006).

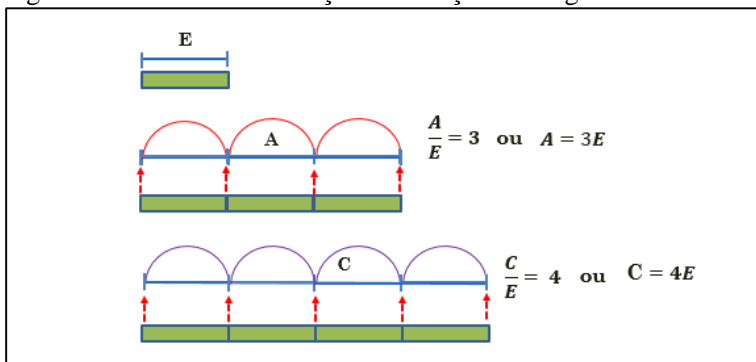
No caso da situação *a*, a adoção de um instrumento de medida – por exemplo o recorte de cartolina – possibilita aos estudantes realizarem a medição do comprimento da unidade de medida E. Em seguida,

⁶⁸ Vale destacar que o processo de resolução das tarefas particulares, dados de análise da presente pesquisa, tomam por base as orientações apresentadas no livro do professor, de autoria Горбов et al. (2006).

sobrepondo E sobre os segmentos A, B e C, torna-se possível a obtenção do valor aritmético correspondente à medida desses segmentos. Segundo Rosa (2012), no processo de medição, o número se apresenta como propriedade numérica da grandeza. Em outras palavras, ele expressa o resultado da medição que se obtém a partir da relação – de multiplicidade e de divisibilidade – entre a unidade e a grandeza a ser medida. Trata-se, pois, da relação essencial, genética do conceito de número, que é introduzido desde o primeiro ano escolar e que perpassa os demais níveis do ensino (1º, 2º, 3º, 4º e 5º ano).

Conforme Гопбоб et al. (2006), no processo de resolução da tarefa, os estudantes entrarão em contato com situações que lhes são passíveis na execução da medição. Elas são análogas àquelas desenvolvidas em anos anteriores, pois consistem em determinar a quantidade de vezes que a unidade cabe (divisibilidade) ou se repete (multiplicidade) na grandeza a ser medida sem deixar restos. Isso ocorre na medição dos segmentos A e C, uma vez que a unidade de medida E cabe quantidade de vezes inteira, 3 e 4, nos respectivos segmentos (Figura 6).

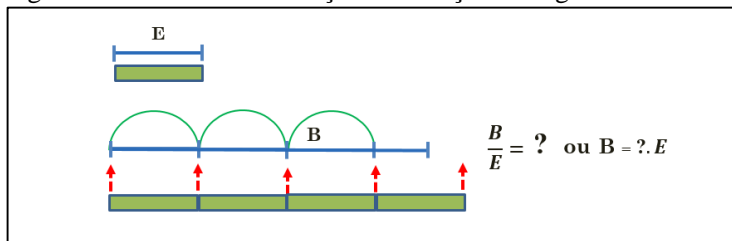
Figura 6 – Processo de medição em relação aos segmentos A e C



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

No entanto, quando a referência é o segmento B, os estudantes serão colocados em situações totalmente novas. Para Гопбоб et al. (2006) isso ocorre ao verificarem que a unidade de medida E não cabe uma quantidade de vezes inteira no segmento a ser medido, conforme mostra a figura 7.

Figura 7 – Processo de medição em relação ao segmento B



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

A situação requer dos estudantes a tomada de decisão e a busca de alternativas. De acordo com Rosa (2012), Madeira (2012), Souza (2013), Mame (2014), Búrigo (2015), Hobold (2014), Silveira (2015), os organizadores do ensino davydoviano, ao proporem tarefas que colocam o estudante em situação desconhecida, o fazem para cumprir o propósito de colocá-lo em constante ação investigativa. Trata-se de condição imprescindível ao ensino desenvolvimental e peculiar da atividade de estudo. Davýdov e colaboradores expressam precaução no que diz respeito ao espontaneísmo do estudante em relação à busca de soluções para situações novas. Se deixar exclusivamente à mercê dele é possível que desista, crie soluções errôneas ou passe a desinteressar-se pela disciplina de Matemática e mesmo pelo estudo.

Por isso, na medição do segmento B, os autores sugerem que o professor levante o seguinte questionamento: “**Não existe tal número ou apenas não sabemos?**” (ГОРБОВ et al., 2006, p. 122). Vale destacar que no segmento B, a unidade de medida E cabe três vezes inteira e resta uma parte (Figura 7). As incertezas que levam ao referido questionamento dizem respeito ao número que representa a quantidade de vezes que a unidade de medida E cabe no segmento B, uma vez que a razão ⁽⁶⁹⁾ $\left(\frac{B}{E}\right)$ não resulta em um número inteiro.

Tal impossibilidade de medição⁷⁰, apresentada na tarefa, traduz o que Caração (2002) denomina de um dilema que se apresentou historicamente no processo de produção do número racional. De acordo

⁶⁹“Razão de dois números tomar-se-á aqui sempre como sinônimo de quociente desses dois números” (CARAÇÃO, 2002, p. 33).

⁷⁰O termo “impossibilidade de medição”, aqui adotado, refere-se à divisão cujo quociente não possui representação dentro do conjunto dos números inteiros. Trata-se, pois, de uma nova representação numérica que ainda é desconhecida pelos estudantes.

com o referido autor, o dilema surge diante do problema de medida, em que a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza em medição, o que requer a subdivisão da unidade. Nesse caso, conforme Caraça (2002, p. 34), há possibilidades de duplo posicionamento:

a) ou renunciamos a exprimir numericamente a medição de \overline{AB} com a unidade \overline{CD} [no caso da medição de B por E da situação *a*, em análise], o que além de incômodo, levanta novas questões – se podemos exprimir a medida em relação à nova unidade e não em relação à antiga, será por que aquela terá algum privilégio especial? Qual? Por quê? b) ou desejamos exprimir sempre a medida por um número – princípio de extensão⁷¹ – e então temos que reconhecer que o instrumento numérico até aqui conhecido – o conjunto dos números inteiros – é insuficiente para tal e há que completá-lo, aperfeiçoá-lo nesse sentido. Como?

Esse âmbito de extensão é observado na organização davydoviana de ensino a partir do quinto ano escolar, pois nos anos anteriores os resultados obtidos no processo de medição das grandezas são apenas os números inteiros positivos (ГОРБОВ et al., 2006). No entanto, desde o primeiro ano escolar, a finalidade do ensino é o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Isso só ocorre, segundo Davýdov (1982), mediante a apropriação das relações gerais obtidas no processo de medição entre grandezas – igualdade e desigualdade, parte e todo, multiplicidade e divisibilidade, entre outras relações – que se constituem no fundamento para o desenvolvimento dos respectivos conceitos: número, adição e subtração, multiplicação e divisão, tabuada, sistema de numeração, etc.

A discussão da situação *a* – quando se estabelece a relação da medida E com o segmento B – coloca o estudante diante de duas revelações. Uma delas é a expressão de *conhecimento* já apropriado, qual seja: o domínio de um ‘procedimento de medição’ que contempla todas

⁷¹ Para Caraça (2002, p. 9) o princípio de extensão consiste em que o homem “[...] tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências”.

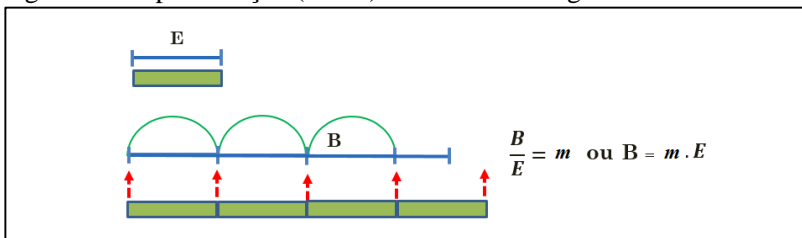
as características e relações necessárias para expressar uma singularidade numérica, o natural.

A outra revelação se caracteriza como um *desconhecimento*. E, como tal, coloca o estudante diante de uma nova necessidade: a busca de um *novo procedimento de medição* que ‘permite a expansão do campo numérico’ (ГОРБОВ et al., 2006). A resolução dessa situação específica (mediação de B pela unidade E) tem como objetivo a ampliação do processo de medição, a ser apropriado pelos estudantes, que extrapole as medidas exatas (inteiras). Isso significa que não se trata de abandonar aqueles procedimentos já apropriados, mas sim tomá-los como ponto de partida para a apreensão de novos conceitos, expressos por meio de um modelo universal. Para Davídov (1988), os diferentes tipos de números – natural, racional, irracional, negativo – surgem a partir de uma mesma base universal que expressa o geral, a relação entre as grandezas. O novo que se busca diz respeito a outra possibilidade de representação da unidade de medida que, além do número natural, expresse o número racional, fracionário.

A inter-relação entre o *conhecido* e o *desconhecido* gera o *concreto caótico* no pensamento, pois se expressa como conhecimento difuso por não dar conta de traduzir a relação essencial do novo processo de medição e, por consequência, de outra singularidade numérica. Por decorrência, o movimento do pensamento, necessário para a resolução da situação em análise, consiste no processo de redução do concreto ao abstrato. Isso requer um processo de análise com ênfase nos procedimentos de medição que revelarão a base universal, a partir da separação dos aspectos essenciais dos não essenciais, bem como suas propriedades.

Essas peculiaridades conceituais, portanto, fazem com que a situação *a*, coloque o estudante frente a um problema de medida, gênese do surgimento do número racional. Isso requer, segundo Горбов et al. (2006), a intervenção do professor com questionamentos sobre o aspecto quantitativo presente no processo de medição do segmento B com a unidade de medida E. Suas orientações levam à elaboração da conclusão de que **se trata de um número ainda desconhecido**. Por isso, sugere a representação **por uma letra qualquer** (Figura 8). Ou seja: $\frac{B}{E} = m$ ou $B = mE$ (ГОРБОВ et al., 2006).

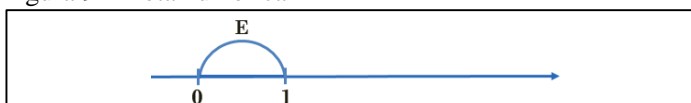
Figura 8 – Representação (literal) da medida do segmento B



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Para Davýdov, esse tipo de representação (literal) faz parte do processo de aprendizagem do estudante desde o primeiro ano escolar, assim como a representação objetual e a gráfica. Ou seja, tratam-se de representações que possibilitam a explicitação das relações abstraídas no processo de medição, que por consequência propiciam a revelação do modelo universal. Portanto, não é algo novo, uma vez que essas representações são adotadas no desenvolvimento de tarefas particulares, quer do 1º ao 5º ano. No entanto, ainda falta determinar qual é o número *m* em termos aritméticos. Para tanto, os organizadores do ensino elaboram outras situações que, aos poucos, dão subsídios para chegar ao novo método de medição e, por consequência, a outro conceito numérico. Por isso, na mesma tarefa, solicitam que se determine na reta numérica (Figura 9) a quantidade de vezes que a unidade E cabe nos respectivos segmentos (ГОПБОВ et al., 2006).

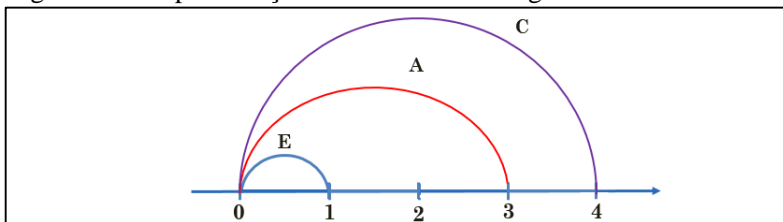
Figura 9 – Reta numérica



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

Conforme Гопбоб et al. (2006), os estudantes procederão sem dificuldades a representação, na reta numérica, dos resultados referentes aos segmentos A e C, respectivamente, 3 e 4 (Figura 10).

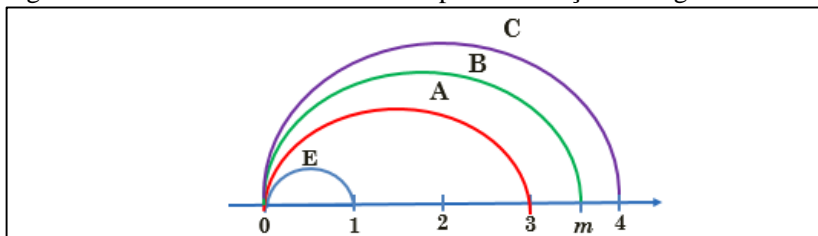
Figura 10 – Representação das medidas dos segmentos A e C



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбоб et al. (2006).

Entretanto, no segmento B, os estudantes desconhecem a medida m , ou seja, a quantidade de vezes que E cabe por inteiro no segmento B. Diante desse impasse, a conclusão devidamente orientada pelo professor é de que a unidade de medida E torna-se insuficiente para determinar a medida do segmento B, conforme a figura 11 (ГОРБОВ et al., 2006).

Figura 11 – Insuficiência da medida E para a medição do segmento B



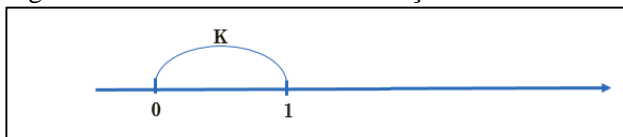
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбоб et al. (2006).

Porém, os autores não propõem de imediato uma tarefa que dê a saída para tal dificuldade. Antes disso, apresentam uma situação similar que traz à tona o mesmo problema ao adotarem outra unidade de medida, independentemente de seu comprimento.

Tarefa 1 – Situação b

“b) selecione os mesmos números em uma reta numérica para uma outra etapa” (ГОРБОВ 2011, p. 30).

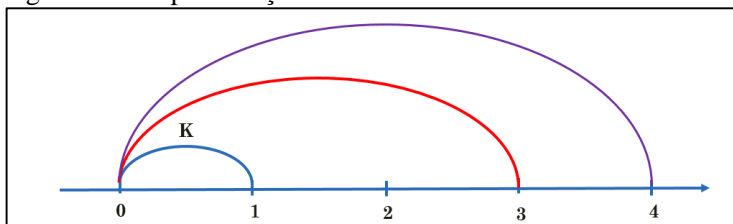
Figura 12 – Dados referentes à situação *b* da tarefa 1



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

Na situação *b* (Figura 12), a orientação é para que os estudantes representem com a unidade de medida *K* os mesmos valores de medida da etapa anterior. Em outras palavras, os valores de medida 3 e 4 passam a ser representados na reta numérica por meio da unidade de medida *K* (Figura 13).

Figura 13 – Representação na reta numérica com a unidade *K*



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Гопбоб et al. (2006) dizem que essa representação é tranquila entre os estudantes, porque eles conhecem os números 3 e 4, valores de medidas inteiras em relação à unidade. Nesse sentido, ao se propor a representação na reta numérica das medidas obtidas na etapa anterior, o objetivo é chamar a atenção dos estudantes de que os referidos valores (3 e 4) representam uma quantidade inteira (de vezes) de qualquer unidade de medida, independentemente de seu comprimento. No entanto, vale também destacar que ao se adotar uma outra unidade de medida – no caso da tarefa a unidade *K* – altera-se também a medida da grandeza, isto é, $3K \neq 3E$, pois $K > E$.

Mas a questão à mercê de solução é: Como representar *m* vezes a quantidade que *K* se repete? Se recorrer à reta numérica, nela não se encontrará, explicitamente, um valor *m*, indicativo da medida de *K*, pois se trata de um número não conhecido pelos estudantes (ГОПБОВ et al., 2006).

A situação demanda precaução de ordem pedagógica, a fim de evitar consequências equivocadas de teor conceitual matemático como,

por exemplo, que os estudantes elaborem um pensamento fixo de que basta conhecer o número em sua representação aritmética com a especificidade de ser natural. Nesse sentido, Гопбоб et al. (2006) alertam “[...] que o não conhecimento de números novos tem razões muito mais profundas”. Por isso, os autores propõem que o professor estabeleça um determinado valor numérico de m , por exemplo, 3,585. A referida informação, porém, pouco ajudará a resolver o problema, uma vez que os estudantes desconhecem o processo de medição que resulta na construção do valor da medida em questão (ГОПБОВ et al., 2006).

A indicação de tal valor não tem a intenção de embarçar ainda mais o dilema da impossibilidade de representar ou de indicar uma quantidade que não seja inteira. Em vez disso, a preocupação é com a elaboração da síntese: “nós não conhecemos todos os números e, por isso, nem sempre somos capazes de executar alguma ação e resolver os problemas relevantes” (ГОПБОВ et al., 2006, p. 122).

Em outros termos, a tarefa em questão tem o propósito de criar a necessidade para o surgimento de outro conceito numérico por consequência de um novo modo de medir. A criação de necessidade é uma característica do modo davydoviano de organização do ensino, pois é um componente da estrutura de qualquer atividade humana. Portanto, não se trata apenas de uma peculiaridade de tarefas da atividade de estudo referente à fração, mas de qualquer outro conceito. Isso se explicita nos estudos de Rosa (2012) sobre conceito de número; Rosa, Damazio e Alves (2013) sobre adição e subtração; Madeira (2012) sobre multiplicação; Rosa, Damazio e Crestani (2014) sobre divisão; Hobold (2014) sobre tabuada; Silveira (2015) sobre sistema de numeração; e Búrigo (2015) sobre número negativo.

Vale mencionar a investigação de Búrigo (2015) por evidenciar que a necessidade emergente no estudo dos números negativos é a apropriação, pelo estudante, de uma nova grandeza: a vetorial. Isso porque a grandeza escalar como fundamento dos números positivos torna-se insuficiente para explicar o significado de oposto. Conforme Búrigo (2015, p. 20), a grandeza vetorial, o deslocamento e o vetor “se traduzem em necessidades para o desenvolvimento do conceito de número negativo”.

A partir da análise da tarefa 1, com base nas orientações apresentadas no livro do professor, observou-se que no movimento do pensamento voltado para apropriação do sistema conceitual de fração, a necessidade maior se insere no contexto de medição das grandezas. Mais especificamente, diz respeito à subdivisão da unidade de medida em partes iguais, na qual se toma uma delas como nova unidade. Em outros

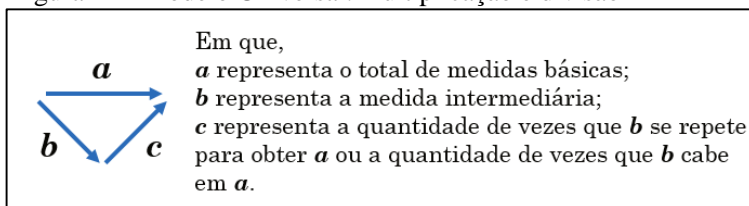
termos, na tarefa 1, tal necessidade é gerada quando a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza, isto é, sem deixar resto. Por consequência, requer a busca de um novo procedimento de medição que permita a expansão do sistema numérico (ГОРБОБ et al., 2006).

Vislumbra-se, então, as abstrações $\frac{A}{E} = 3$, $\frac{B}{E} = m$ e $\frac{C}{E} = 4$. Porém, elas não se caracterizam ainda como a abstração inicial, substancial, a “célula” que constitui a base universal do conceito de fração. No entanto, tornam-se ponto de partida para análise do referido conceito, pois expressam a fragilidade dos conhecimentos diante de novas situações de medição.

A próxima tarefa apresenta o mesmo problema de medida proposta na tarefa anterior, cujo resultado da medição não resulta em um número inteiro. No entanto, o procedimento de medição adotado para a resolução da tarefa tem por base as relações essenciais dos conceitos de multiplicação e divisão⁷², que foram introduzidos a partir do segundo ano escolar.

Rosa, Damazio e Crestani (2014), ao investigarem os possíveis nexos conceituais da divisão na proposição de ensino de Davýdov e colaboradores, constataram sua inter-relação com o conceito de multiplicação, cujo movimento conceitual é expresso no modelo abstrato (Figura 14).

Figura 14 - Modelo Universal: multiplicação e divisão



Fonte: Elaboração conforme o estudo realizado por Rosa, Damazio e Crestani (2014).

Tal modelo, segundo os autores, é elaborado pelos estudantes durante a resolução de diversas tarefas particulares. Isso significa dizer que é no processo de resolução das tarefas, juntamente com a orientação do professor, que os estudantes abstraem as relações entre as grandezas –

⁷² Ambos conceitos são tratados em sua essência pelas seguintes referências: MADEIRA (2012), HOBOLD (2014), CRESTANI (2013), ROSA, DAMAZIO e CRESTANI (2014).

unidades de medida básica, unidade de medida intermediária e total de medidas básicas – e fixam no esquema os nexos essenciais que possibilitam a generalização do referido modelo universal.

Para Rosa, Damazio e Crestani (2014), o essencial do conceito de multiplicação consiste em verificar no processo de medição a quantidade de vezes (**c**) que a unidade intermediária (**b**) se repete para obtenção do total de unidades básicas (**a**). Assim sendo,

[...] o número *b*, que se repete, chama-se multiplicando (unidade de medida intermediária); o número *c*, que representa a quantidade de vezes que *b* se repete, chama-se multiplicador, e o resultado (*a*) é chamado produto (total de unidades básicas). (ROSA; DAMAZIO; CRESTANI, 2014, p. 182).

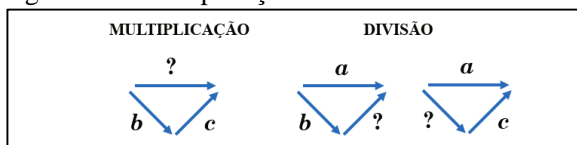
Na divisão, a relação essencial consiste em verificar a quantidade de vezes (**c**) que a unidade de medida intermediária (**b**) cabe no total de medidas básicas (**a**) (ROSA; DAMAZIO; CRESTANI, 2014). Vale esclarecer que a proposta de Davýdov, ao ter como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, traz entre as seis ações que estruturam a sua organização do ensino uma específica para o processo de modelação. O modelo é a representação que traduz a inter-relação essencial de um determinado conceito em nível científico, base incondicional para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Conforme Caraça (2002, p. 22),

Ao número *a* chama-se dividendo; ao número *b*, divisor; ao número *c*, quociente; a divisão é, portanto, a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo.

Nesse caso, a divisão apresenta-se como operação inversa da multiplicação, uma vez que conhecido o produto e um dos fatores, determina-se o outro fator (CARAÇA, 2002), como mostra a figura 15.

Figura 15 – Multiplicação e divisão no modelo abstrato



Fonte: Elaboração conforme o estudo realizado por Rosa, Damazio e Crestani (2014).

Essa deferência ao conceito de multiplicação e divisão é proposital, pois, como demonstraremos adiante, eles são referência para a apreensão do sistema conceitual de fração. Assim também é seu modelo universal, principalmente as ideias de unidade básica e intermediária. É para essa retomada das operações de multiplicação e divisão que se voltam as próximas tarefas que conduzirão o processo de redução do concreto ao abstrato do movimento do pensamento conceitual de fração que, por sua vez, conclama por um novo método de medição.

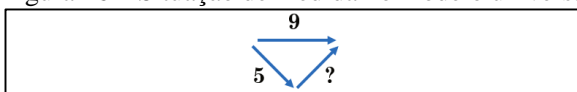
Para a resolução da **tarefa 2**, parte-se do pressuposto de que os estudantes tenham abstraído e generalizado tais conceitos que, de acordo com Hobold (2014, p. 30) “[...] constituem o núcleo do sistema conceitual referente à terceira tarefa de estudo”, na qual orienta os estudantes na introdução dos diferentes tipos de número.

Tarefa 2:

“Marque um ponto na reta numérica que corresponda ao valor aritmético de a . Para tanto, considere $a = 9 : 5$ ” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 31).

Como anunciado, a **tarefa 2** é desenvolvida com base no conceito de divisão, em que 9 representa o valor total de medidas básicas e 5 o valor da medida intermediária. O que se busca é a quantidade de vezes que a medida intermediária cabe no total de medidas básicas. Segundo Rosa, Damazio e Crestani (2014), se conhecemos o todo e uma das partes, torna-se possível encontrarmos a outra parte – o quociente (Figura 16).

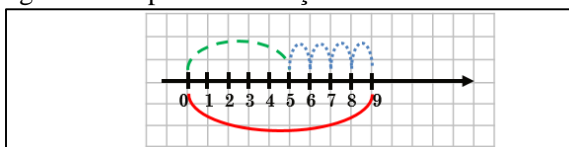
Figura 16 – Situação de medida no modelo universal



Fonte: Elaboração conforme o estudo realizado por Rosa, Damazio e Crestani (2014).

A tarefa é propícia para que os estudantes recorram a um elemento mediador do processo de apropriação das relações e representações conceituais, adotado em anos anteriores: a reta numérica. Por meio dela, torna-se possível a identificação de que a unidade de medida intermediária (que corresponde a 5 unidades básicas) cabe uma vez inteira no total de medidas básicas, restando ainda 4 unidades de medida básicas, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Operacionalização da divisão na reta numérica



Fonte: Elaboração conforme o estudo realizado por Rosa, Damazio e Crestani (2014).

O problema que surge no processo de medição da **tarefa 2**, segundo Гопѳов et al. (2006, p. 122), está “[...] relacionado com a impossibilidade de, em alguns casos, os estudantes realizarem a divisão”, isto é, quando se trata de uma divisão não exata. Portanto, trata-se de um problema similar ao que ocorreu na resolução da tarefa 1. Porém, há uma diferença sutil e de fundamental importância no processo analítico de redução do concreto ao abstrato para o desenvolvimento do pensamento. Ou seja, a referência no processo de medição não é mais a ação objetual (com recortes de cartolina), conforme requeria a tarefa 1, mas sim a representação gráfica (por meio da reta numérica e arcos). Tais representações, segundo Hobold (2014), compõem o elemento mediador que possibilita, no processo de pensamento, a elevação das ações objetais para o plano mental.

As impossibilidades que caracterizaram ambas as tarefas, de acordo com Caraça (2002), surgem em uma peculiaridade conceitual: quando o dividendo não é múltiplo do divisor. Em outras palavras, se um número inteiro m não é divisível por um número inteiro n . Por exemplo, 9 não é divisível por 5, pois não existe um número inteiro que multiplicado por 5 resultará nele.

Em termos representativos, a figura 17 explicita tal inexactidão pela não existência de repetição de arcos que apontam o intervalo de 5 unidades (medida intermediária, divisor). Os demais arcos que aparecem no esquema são representativos de unidades básicas que não formaram uma unidade intermediária (correspondem ao resto da divisão 9:5). A

divisão só seria exata se houvesse repetições de arcos de mesma extensão, determinada pelo valor da medida intermediária.

Portanto, não há, entre os inteiros, um número para ser o quociente da referida divisão. Assim sendo, a obtenção do valor aritmético *a* (correspondente ao quociente da divisão 9 por 5) só é possível com a criação de “[...] um novo campo numérico, de modo a reduzir essa impossibilidade” (CARAÇA, 2002, p. 34).

Em síntese, as tarefas 1 e 2 estão organizadas de modo a manifestarem no processo de medição a contradição – surgimento de medidas não inteiras – de tal forma, que gere a necessidade de buscar um novo método de medição que supere as dificuldades apresentadas no processo de resolução.

Para Гопбoв et al. (2006), as dificuldades que se apresentam no processo de resolução das tarefas geradoras de necessidades conceituais surgem devido

[...] às limitações em nossos conhecimentos primários, associados à capacidade limitada de medição, a medição de quantidades. [...] Portanto, para conhecer novos números, é preciso abrir (inventar) novas formas de medir valores em situações quando a unidade não cabe no valor medido sem deixar resto. (ГОПБОВ et al., 2006, p. 122).

As tarefas particulares 3, 4 e 5 cumprem o propósito anunciado pelos autores de propiciar aos estudantes a apropriação de novos métodos de medição. Elas têm por finalidade a introdução da modelação gráfica – esquema com setas – que expressa as relações de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas (unidade básica e unidade intermediária).

Segundo Гопбoв et al. (2006), uma das condições para o desenvolvimento de novos métodos e, conseqüentemente, novos números, é a análise dos métodos antigos. Por isso, os autores propõem que a introdução do novo método de medição – que resultará nos números fracionários – ocorra pela análise de dois métodos adotados anteriormente para a apropriação de outros conceitos, quais sejam: 1) para a obtenção do conceito de número $\left(\frac{A}{E} = N\right)$, que consiste na relação entre uma grandeza e uma unidade de medida, cujo resultado reflete um número de valor múltiplo, derivado da unidade (medida básica); 2) para os conceitos de multiplicação e divisão ($b \times c = a$, $a \div b = c$ ou $a \div c = b$), em que

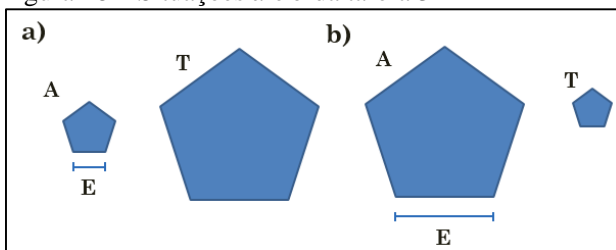
a medida intermediária passa a ser adotada como medida base do processo de medição. Tal análise busca evidenciar as possíveis limitações que surgem ao se adotar os métodos antigos para o processo de medição, cuja unidade de medida não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza sem deixar resto (ГОРБОБ et al., 2006).

Contudo, o foco de análise nessas tarefas é o movimento do pensamento, a fim de revelar a relação essencial do conceito de fração.

Tarefa 3:

“Adotando a medida E, desenhar segmentos de comprimento igual ao perímetro de A e T, pentágonos regulares” (ГОРБОБ et al., 2006, p. 31), conforme a figura 18.

Figura 18 – Situações *a* e *b* da tarefa 3



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

A tarefa apresenta dois pentágonos regulares (A e T) que possuem áreas distintas, $A \neq T$. Sua finalidade consiste em representar, por meio de segmento de reta, o perímetro de cada pentágono. Para a construção dos respectivos segmentos será adotada como unidade a medida E (ГОРБОБ et al., 2006).

Para sua resolução, são apresentadas as situações *a* e *b*, de modo que em cada uma delas são realizados dois processos de medição: um para obtenção do perímetro do pentágono A; outro referente ao perímetro de T. Em ambas as medições, adota-se a unidade de medida E.

A participação do professor ocorrerá com a orientação aos estudantes, para que observem os dois tipos de grandezas: área (pentágonos A e T) e comprimento (segmento que corresponde à unidade de medida E). Também deverá questioná-los: Qual grandeza a ser considerada no processo de medição? Após ouvir as sugestões dos estudantes, o professor retomará a discussão sobre o conceito de medição de grandezas (ГОРБОБ et al., 2006).

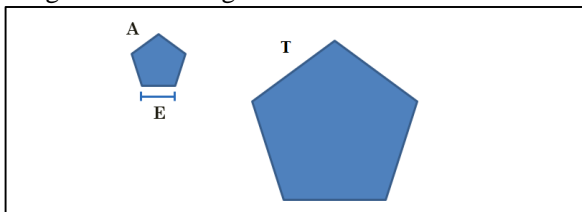
Esse alerta tem seu fundamento, pois, em qualquer processo de medição, a análise inicial referente à primeira abstração volta-se para a identificação da grandeza a ser considerada. Nesse sentido, vale dizer que “[...] medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.” (CARAÇA, 2002, p. 29). Nesse caso, a grandeza a ser considerada é o comprimento, representado na tarefa por meio do segmento correspondente a unidade de medida.

Na continuidade, a análise necessária ao desenvolvimento da tarefa – e, por consequência, do processo de redução do pensamento concreto caótico ao abstrato – traz elementos conceituais e didáticos que se traduzem em dois questionamentos: O que é perímetro? Como proceder o processo de medição para a construção dos segmentos referentes aos perímetros dos pentágonos A e T? Quanto ao perímetro, Mame (2014, p. 121) diz que a organização davydoviana do ensino o concebe como o comprimento da linha quebrada fechada que delimita o polígono, bem como pode ser entendido pela “[...] soma das medidas dos segmentos que compõem os lados”. Essa concepção é de domínio dos estudantes, pois fora introduzido no segundo ano do Ensino Fundamental. No primeiro ano, são introduzidos os conceitos de pontos, segmentos, linhas retas e curvas, comprimento, linhas fechadas e abertas, limites das figuras, área e volume (ROSA, 2012). Estes, no segundo ano, aparecem como base para a introdução de novos conceitos geométricos, tais como perímetro, raio, ângulo, polígonos regulares, entre outros (MAME, 2014).

No que diz respeito à segunda questão, exposta anteriormente, os estudantes deverão verificar quantas vezes a medida E cabe no lado dos respectivos pentágonos, a fim de obterem os segmentos correspondentes a seus perímetros.

Situação a (Figura 19):

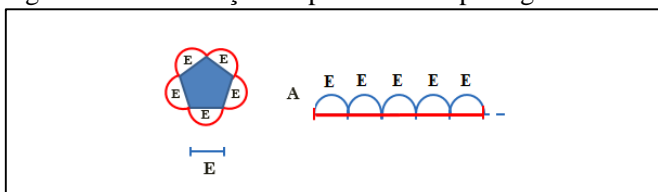
Figura 19 – Pentágonos A e T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопѳов et al. (2011).

Como mencionado, a situação *a* (Figura 19) coloca o estudante frente a duas possibilidades de medição. Uma delas trata da relação entre A (pentágono) e E (unidade). Nesse caso, a abstração que moverá o pensamento em estágio de desenvolvimento do estudante é a relação de igualdade ($I_A=E$). Para a construção do segmento necessário, correspondente ao perímetro do pentágono A, a unidade de medida E deve se repetir 5 vezes, conforme a figura 20 (ГОРБОВ et al., 2006).

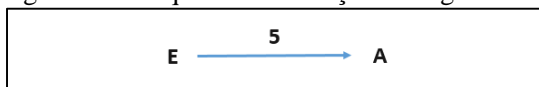
Figura 20 – Construção do perímetro do pentágono A



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Nesse primeiro caso, adota-se um método de medição, aquele referente à obtenção do conceito de número, na qual se verifica que a unidade de medida cabe quantidade de vezes inteira na grandeza sem deixar restos, isto é, $\frac{A}{E} = 5$ ou $A = 5E$. Conforme Rosa (2012), esse processo expressa a relação universal de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas, mediada pela unidade de medida. Essa relação também é representada, segundo Горбов et al. (2006), por meio de esquema (Figura 21) que expressa o movimento que foi realizado no processo de medição. Porém, vale esclarecer que não se trata de algo novo, pois esse tipo de representação se apresentou em anos anteriores. Sua evidenciação nessa tarefa cumpre um dos seus objetivos, que é a fixação de procedimentos apropriados até então (ГОРБОВ et al., 2006).

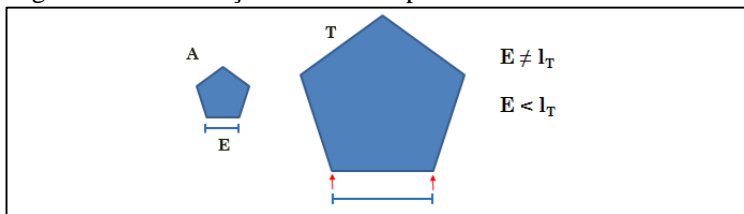
Figura 21 – Esquema da medição do segmento A



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

No caso do pentágono T, observa-se que o comprimento da unidade de medida E não é igual ao da medida do seu lado ($I_T \neq E$) (Figura 22).

Figura 22 – Diferença entre os comprimentos: E e lado de T

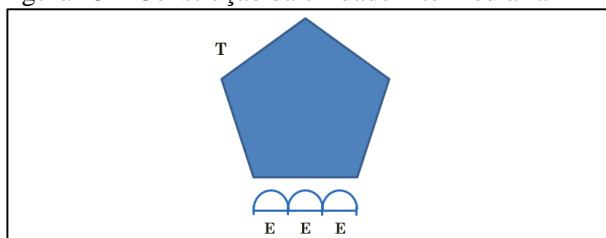


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

A resolução dessa situação, conforme Гопбоб et al. (2006), coloca o pensamento dos estudantes diante de uma outra abstração – de teor visual – a desigualdade de grandezas, diferentemente da medição do perímetro de A que se tratava da igualdade. A desigualdade – que implica na relação maior ou menor – substancia a identificação da limitação do processo de medição anterior. Nesse caso, a orientação é para que o professor os questione: Como proceder na construção do segmento, que corresponda ao perímetro do pentágono T? Nas discussões, o professor enfatizará que, para a execução dessa situação de medida, se faz necessário retomar o procedimento de medição adotado nos conceitos de multiplicação e divisão que traz uma peculiaridade essencial que é a ideia de unidade intermediária. Tal unidade, é construída pelo agrupamento da unidade básica, o que agiliza o processo de medição das grandezas, bem como permite o controle de quantidades muito extensas (MADEIRA, 2012).

Conforme as orientações do livro do professor, a partir da unidade de medida E (unidade básica), os estudantes construirão uma nova unidade (intermediária), que corresponda ao comprimento do lado do pentágono T, figura 23 (ГОПБОВ et al., 2006).

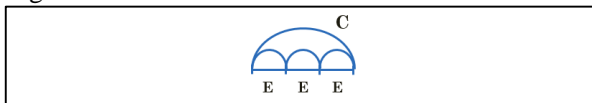
Figura 23 – Construção da unidade intermediária



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Com um instrumento de medida – recortes de cartolina, barbante, entre outros – eles verificarão que a unidade E repete-se por 3 vezes quando sobreposta no lado do pentágono T. Por definição dos próprios estudantes, se estabelecerá o comprimento do lado do pentágono T, de modo que $C = 3E$ (Figura 24) (ГОРБОВ et al., 2006).

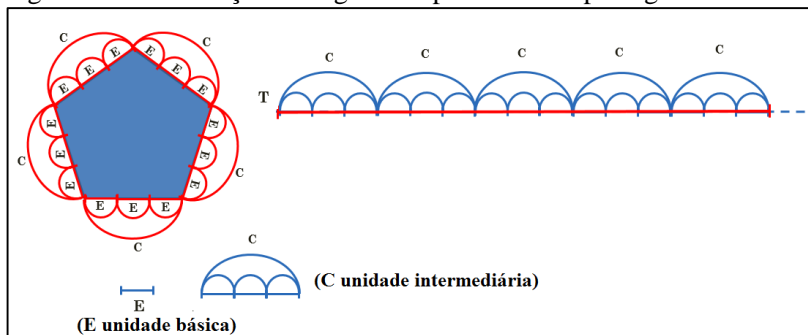
Figura 24 – Unidade intermediária C



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Na construção do segmento, que corresponda ao perímetro do pentágono T, a unidade de medida intermediária C se repetirá 5 vezes, conforme a figura 25 (ГОРБОВ et al. (2006).

Figura 25 – Construção do segmento: perímetro do pentágono T

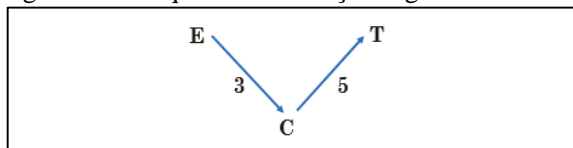


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

O resultado da medição pode ser expresso da seguinte maneira:
 $\frac{T}{E} = 15$ ou $T = 15E$. Porém, vale destacar que a construção do perímetro do pentágono T pela unidade básica E só é possível mediante a construção da unidade de medida intermediária C ($T = 5C$, sendo $C = 3E$, se obtém $T = 3E \times 5 = 15E$). A unidade de medida intermediária C se constitui em elemento mediador no processo de medição, pois propicia, aos estudantes, o desenvolvimento do pensamento teórico multiplicativo, que supera a contagem um a um própria do pensamento empírico (MADEIRA, 2012).

Esse método de medição, segundo Горбов et al. (2006), também se representa por esquema (Figura 26).

Figura 26 – Esquema de medição segmento T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

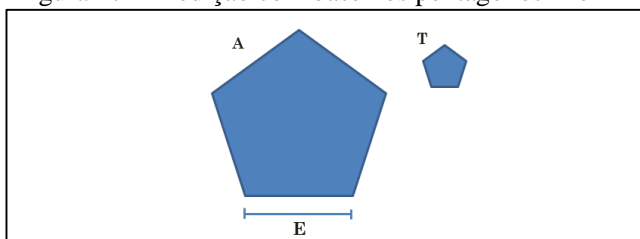
Após o registro dos números no esquema, o professor fará a seguinte leitura: 3 tomado por 5 vezes, obtém-se 15 unidades básicas. Em outras palavras, a unidade básica (E) se repete por 3 vezes o que resulta na unidade intermediária ($C=3E$), que se repete por 5 vezes, a fim de se obter o perímetro do pentágono T ($T=15E$) (ГОПБОВ et al., 2006). Conforme Hobold (2014, p. 98) “o esquema sintetiza o movimento percorrido durante a resolução da tarefa no que se refere à construção da unidade de medida intermediária [...]” e a grandeza a ser medida.

A análise dos métodos de medição – adotados na **situação a** – mostra que eles apresentam algo em comum: a relação de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas. A diferença entre um método e outro está na quantidade das referidas relações. No primeiro caso é direta: $E \rightarrow A$. No segundo, ao se adotar a medida intermediária como unidade base do processo de medição, a relação $E \rightarrow T$ deixa de ser direta para ser mediada por outras duas: $E \rightarrow C$ e $C \rightarrow T$ (MADEIRA, 2012).

Situação b (Figura 27):

Outra situação (Figura 27) referente ao processo de medição, tendo por base de análise os pentágonos A e T, é apresentada com a mesma finalidade da anterior, ou seja, construir o segmento de mesmo comprimento do perímetro das referidas figuras.

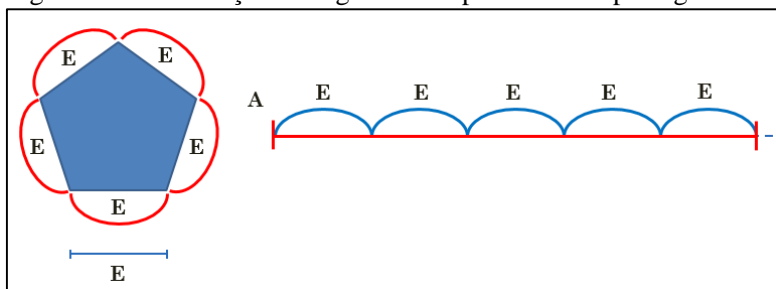
Figura 27 – Medição com base nos pentágonos A e T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

De acordo com as orientações apresentadas no livro do professor a situação *b* também envolve dois processos de medição. Um deles é análogo àquele desenvolvido na situação *a*, pois os estudantes verificarão que a unidade *E* é igual ao comprimento do lado do pentágono *A* ($l_A = E$). O segmento a ser construído, correspondente ao perímetro do mesmo pentágono, medirá 5 vezes a unidade *E*. Todo esse procedimento se explicita na figura 28.

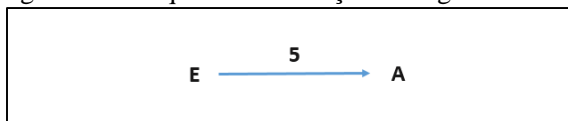
Figura 28 – Construção do segmento do perímetro do pentágono *A*



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Isso ocorre, segundo Гопбоб et al. (2006), porque tanto na situação *a* quanto na situação *b*, o comprimento do lado do pentágono *A* corresponde a uma unidade inteira da medida (*E*), que no processo de medição não deixa resto. Isso significa que, assim como a situação anterior, tem o mesmo esquema de representação (Figura 29):

Figura 29 – Esquema de medição do segmento *A*

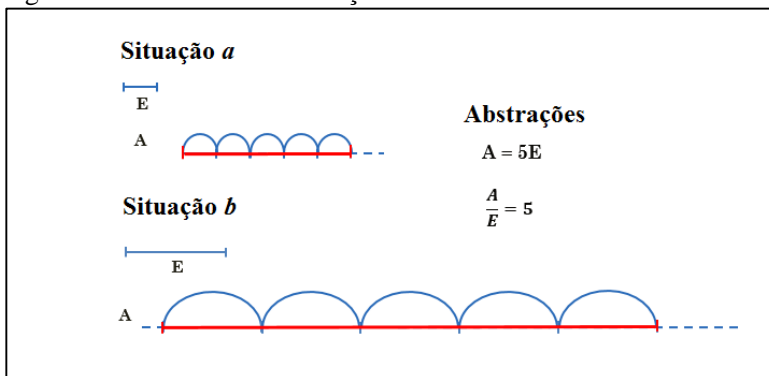


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Essa relação, explicitada nas situações *a* e *b*, reafirma a ideia de que, na proposição de ensino davydoviana, o número aparece como uma abstração teórica, resultante da relação de medição entre duas grandezas – uma tomada como unidade (ROSA, 2012). Por exemplo, o número “5” obtido nas situações *a* e *b* representa a quantidade de vezes (inteira) que a unidade de medida *E* deve se repetir para a obtenção dos respectivos segmentos, representativos dos perímetros correspondentes ao pentágono *A*. Importa, também, destacar que o resultado –abstraído por meio das

relações $A = 5E$ (multiplicidade) e $A/E = 5$ (divisibilidade) entre grandezas – é o mesmo em ambas as situações. No entanto, ele representa comprimentos diferentes, em consequência dos tamanhos das unidades de medidas (Figura 30).

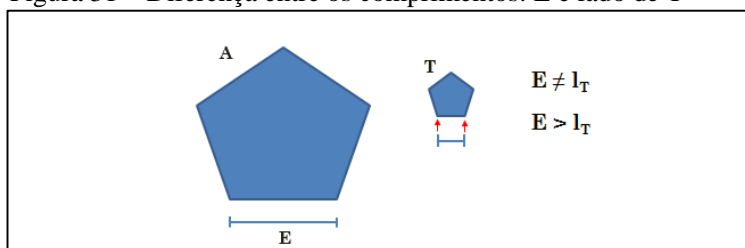
Figura 30 – Análise entre situação *a* e *b*



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

No caso a seguir, a unidade de medida E não é igual a medida do lado do pentágono T ($E \neq l_T$) (Figura 31).

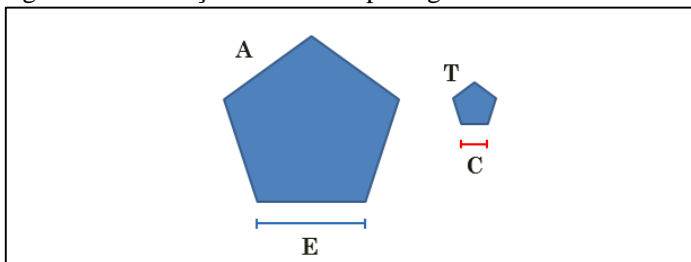
Figura 31 – Diferença entre os comprimentos: E e lado de T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Novamente, apresenta-se ao estudante a relação de desigualdade entre as grandezas. Isso demanda a orientação do professor por meio do questionamento: Como proceder na construção do segmento que corresponda ao perímetro do pentágono T ? Como sugestão, ele fará a seguinte indicação: “Talvez possamos fazer como na situação *a*, construir uma unidade intermediária”, figura 32 (ГОПБОВ et al. (2006, p. 123).

Figura 32 – Medição do lado do pentágono T com a unidade E

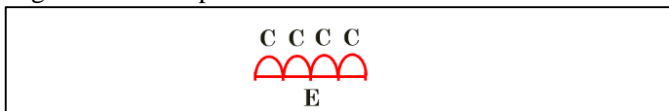


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

De acordo com Гопбоб et al. (2006), os estudantes constatarão a impossibilidade de atender à sugestão do professor, uma vez que a unidade de medida não cabe nenhuma vez (inteira) no lado do pentágono T, pois E é maior que l_T ($E > l_T$). Nesse caso, não se pode usar diretamente a própria unidade de medida (básica) ou construir outra (intermediária) a partir dela, pela sua repetição.

Novamente, entra em cena o professor com o questionamento: Como proceder? Inicia-se o processo de busca de um procedimento que, na certa, conduzirá para a determinação de uma nova unidade com característica de intermediária, porém com significado ainda desconhecido. O mais provável é que, entre alternativas, os estudantes percebam e indiquem a relação inversa: o comprimento da unidade de medida E é 4 vezes maior que o lado do pentágono T, podendo ser expressa por $E = 4C$, como mostra a figura 33 (ГОПБОВ et al., 2006).

Figura 33 – Comprimento da unidade básica E



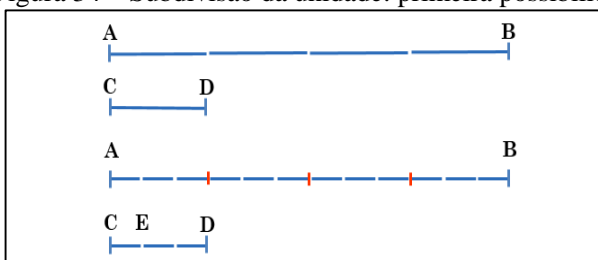
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

É importante destacar que o estudante, ao realizar a medição – quantas vezes o lado do pentágono cabe na unidade E – está diante de uma nova abstração, isto é, a subdivisão da unidade, em estado caótico no pensamento. Trata-se da complexificação do processo de medição, pois “agora a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza, o que leva à necessidade de dividi-la em partes iguais, com a utilização de uma das partes como nova unidade” (ГОПБОВ et al., 2006, p.121). Isso carece de argumentos dos fundamentos da Matemática. Nesse sentido,

recorremos a Aleksandrov (1973, p. 44), ao afirmar que essa impossibilidade no processo de medição é que faz surgir “[...] a necessidade de fracionar [dividir] a unidade de medida para poder expressar a grandeza com maior exatidão em partes da unidade”.

Caraça (2002) apresenta duas possibilidades de subdivisão da unidade de medida. Em uma delas, toma-se uma unidade (segmento) \overline{CD} para medir uma grandeza (comprimento) \overline{AB} e obtém-se $\overline{AB} = n.\overline{CD}$. No entanto, é possível subdividir a unidade em partes iguais \overline{CE} , o que resulta em $\overline{CD} = x.\overline{CE}$, consequentemente, $\overline{AB} = n.x.\overline{CE}$ (Figura 34).

Figura 34 – Subdivisão da unidade: primeira possibilidade

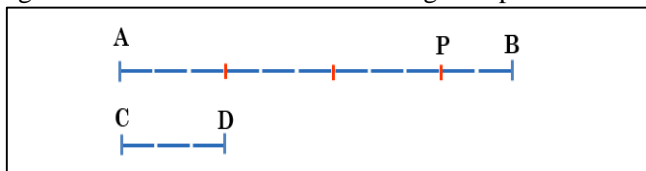


Fonte: Elaboração conforme o estudo de Caraça (2002).

Observa-se que essa subdivisão, apresentada por Caraça (2002), ainda se refere somente à possibilidade de obter como resultado um número natural. Ou seja, não se manifesta a necessidade incondicional para uma nova singularidade numérica, a fração, pois a subdivisão também gera um fator de multiplicidade inteiro. Em outras palavras, a subunidade \overline{CE} cabe vezes inteiras na unidade \overline{CD} e, por extensão, na grandeza \overline{AB} . Trata-se, pois, segundo Caraça (2002), de uma subdivisão não necessária, uma vez que \overline{CD} cabe quantidade exata de vezes em \overline{AB} , isto é, sem deixar resto.

A segunda possibilidade traz a imposição da subdivisão da unidade, algo necessário. Isso porque, no processo de medição de \overline{AB} , a unidade \overline{CD} cabe uma determinada quantidade (inteira) de vezes, mas ainda sobra uma parte menor que a unidade. Nesse caso, faz-se necessária a divisão da unidade de medida em partes iguais (Figura 35), o que requer que se tome uma das partes como nova unidade no processo de medição (CARAÇA, 2002).

Figura 35 – Subdivisão da unidade: segunda possibilidade



Fonte: Elaboração conforme o estudo de Caraça (2002).

No contexto de análise da tarefa 3, a subdivisão da unidade é introduzida a partir da situação de medida, em que a unidade E não cabe nenhuma vez inteira em l_T (lado do pentágono T, representado pela letra C). Trata-se, pois, de uma terceira possibilidade de subdivisão da unidade, a ser adotada quando ela é maior que a grandeza a ser medida.

Em termos de desenvolvimento do pensamento, a primeira divisão traduz um concreto pensado, pois esse processo de medição – que coincide com o resultado de um número natural – é algo que fora apropriado pelos estudantes desde o primeiro ano escolar. Por sua vez, a segunda e a terceira possibilidades se constituem em concreto caótico, em processo de redução de abstrações pertinentes ao de número racional, respectivamente, de fração própria e imprópria.

É no âmbito das duas últimas possibilidades de medição que ocorrem os procedimentos de resolução da situação em foco. Para tanto, o professor apresentará outro modo de representação da medição da unidade intermediária (Figura 36), qual seja: o esquema (Горбов et al., 2006).

Figura 36 - Esquema do processo de medição da medida E



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

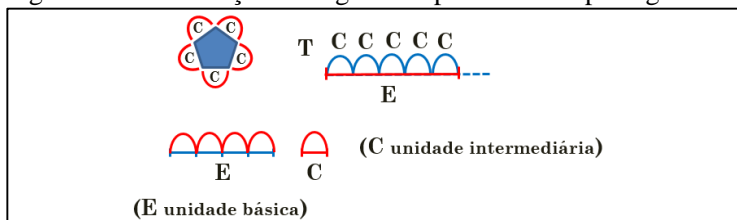
Observa-se, na figura 36, que a seta no esquema aparece com a indicação contrária do que é proposto no modelo abstrato, para apropriação dos conceitos de multiplicação e divisão. Conforme Горбов, Микулина e Савельева (2004), isso ocorre porque na construção do esquema abstrato, a seta representa a relação de multiplicidade, que segue da grandeza menor para a grandeza maior.

Na presente situação de análise, a seta segue a mesma indicação – da grandeza menor para a grandeza maior –, porém o que faz mudá-la é a relação que se estabelece entre as unidades de medida básica e

intermediária. Como no procedimento anterior, situação *a*, a unidade intermediária era o múltiplo da unidade básica (agrupamento), a representação dessa relação consistia em $E \rightarrow C$ (Figura 26). No entanto, na nova situação de medição, a unidade intermediária é submúltiplo da unidade básica (divisão da unidade). Por isso, a representação da referida relação é: $E \leftarrow C$. Isso significa dizer que a unidade intermediária *C* passa a ser menor que a unidade básica *E* ($C < E$). Portanto, a indicação da seta no esquema possibilita, ao estudante, que se oriente em relação ao movimento realizado entre as grandezas.

Desse modo, para a construção do segmento que corresponde ao perímetro do pentágono *T*, a relação expressa pelo esquema (Figura 36) indica que a unidade de medida *E* (medida básica) deve ser dividida em 4 partes iguais. Toma-se uma delas como unidade de medida intermediária (*C*), que se repete por 5 vezes, obtendo o segmento necessário, conforme a figura 37 (ГОРБОВ et al., 2006).

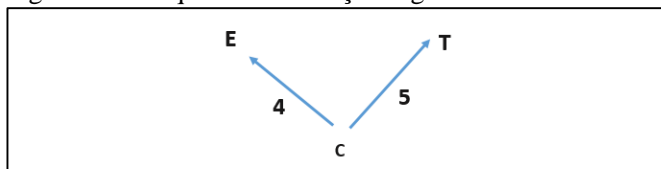
Figura 37 – Construção do segmento: perímetro do pentágono *T*



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Todo esse processo será registrado no esquema de setas pelo professor (Figura 38):

Figura 38 – Esquema de medição segmento *T*



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Com o apoio dessa representação, torna-se possível a seguinte síntese por parte dos estudantes como resultado da participação do professor: “[...] o valor de uma nova unidade [intermediária], pode ser

obtido, não só pelo múltiplo da unidade básica [agrupamento], mas pela sua divisão em partes iguais” (ГОРБОБ et al., 2011, p.124).

Vale enfatizar, segundo Rosental (1962), que o processo de síntese ocorre mediante ao desenvolvimento do processo de análise e vice-versa. Tratam-se, pois, de peculiaridades do processo de cognição, que consideradas em unidades possibilitam a superação das contradições entre a essência e as formas externas de sua manifestação.

Observa-se que nesse processo de análise – referente à introdução da subdivisão da unidade (elemento novo a ser apropriado pelos estudantes no processo de resolução da tarefa) – o ponto de partida consiste na medição de grandezas, nesse caso o comprimento representado pelos segmentos (lados dos pentágonos A e T com a unidade de medida E). Eles são apresentados, inicialmente, na forma objetual-sensorial. Por meio da análise sensorial, é possível abstrair as primeiras relações gerais – maior ($>$), menor ($<$), igual ($=$) e diferente (\neq) – que, de acordo com Rosa (2012, p. 128), “[...] permitem estudar as propriedades de igualdade e desigualdade entre grandezas”.

Por exemplo, na situação α , pressupõe-se que o estudante, por meio da observação dos dados, abstraia as seguintes relações: $l_A = E$ (relação do lado do pentágono A com a unidade E); $l_T \neq E$ ou $l_T > E$ (relação do lado do pentágono T com a unidade E). No entanto, tais abstrações não revelam de imediato a necessidade de subdivisão da unidade. Elas são abstrações gerais em que permeiam somente relações qualitativas (comparação de tamanho). Porquanto, a subdivisão exige relações quantitativas, isto é, verificar em quantas partes iguais deve se dividir a unidade de medida, de modo que ela caiba quantidade de vezes inteira na grandeza.

Para quantificar a unidade de medida E, faz-se necessária a análise das relações gerais, a fim de revelar a característica pela qual se manifesta a necessidade de dividi-la. Assim sendo, o aspecto determinante se manifesta na relação em que a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza a ser medida, sem deixar resto (ГОРБОБ et al., 2006). Essa relação se apresenta a partir da abstração $E > l_T$. Por meio de relações quantitativas, é possível verificar que a unidade de medida E não cabe nenhuma vez inteira no lado (l_T).

No entanto, há ainda a possibilidade de se executar a relação inversa, ou seja, verificar quantas vezes o lado (l_T) cabe na medida E. Ao medir a unidade E com l_T , obtém-se como resultado $E = 4 C$ (C corresponde ao comprimento de l_T). A análise do resultado da medição inversa permite a identificação de que l_T corresponde a uma das partes da

medida E, que se adota como nova unidade de medida intermediária (C): como submúltiplo da medida E.

Os processos do pensamento adotados para a resolução da tarefa – análise sensorial dos dados das tarefas; medição das grandezas em relação à unidade de medida; constatação da insuficiência da unidade de medida; característica que determina a divisão da unidade de medida; relação inversa do processo de medição da unidade de medida pela grandeza; e construção da unidade intermediária – constituem em síntese o movimento de redução do concreto ao abstrato. Em outras palavras, trata-se do movimento do pensamento que possibilita a manifestação da relação essencial – que irá desempenhar o papel de *abstração inicial* para a reprodução do sistema conceitual de fração –, a subdivisão da unidade de medida.

Vale destacar que a tarefa 3 contempla a primeira ação de estudo proposta pelos organizadores da proposição de ensino davydoviana, que consiste na “[...] transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal, geral, do objeto estudado” (DAVÍDOV, 1988, p. 181)⁷³.

Segundo Rosental (1962) a relação universal dos conceitos se manifesta mediante a revelação de sua essência, porém trata-se de um procedimento difícil e complexo. Isso porque a essência não está dada de imediato no objeto analisado. Como já mencionamos no decorrer deste estudo, a simples observação e contemplação dos indícios externos não possibilita a apreensão dos nexos internos que constituem o objeto, visto que o interno consiste nas contradições que geram o seu desenvolvimento.

Assim sendo, a abstração da relação essencial que, por conseguinte, conduzirá a revelação da base universal (a lei que expressa o desenvolvimento do conceito de fração) se manifesta no processo de construção da medida intermediária. Esta, por sua vez, apresenta uma nova qualidade – submúltiplo da unidade básica –, mas que só é abstraída mediante a análise da transformação dos dados. Ou seja, na **situação a**, por exemplo, $E < l_T$, para a medição do lado do pentágono T, a medida básica se repete quantidade de vezes inteira, a fim de obter a medida intermediária. Enquanto na **situação b**, $E > l_T$, os métodos antigos tornam-se insuficientes, o que requer um novo método de medição que possibilite a transformação da unidade básica – agora dividida em partes iguais – para a construção de nova unidade intermediária.

⁷³ [...] transformación de los datos de la tarea con el fin de poner al descubierto la relación universal del objeto estudiado (DAVÍDOV, 1988, p. 181).

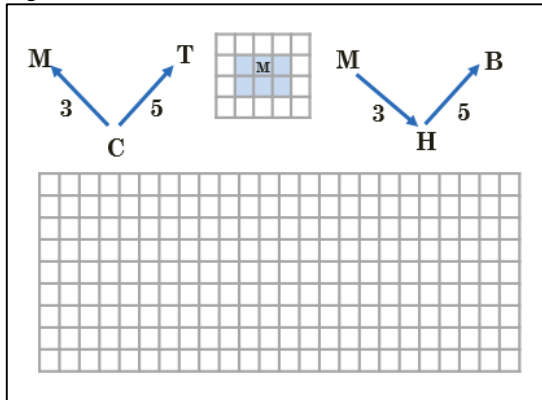
Nesse contexto, a ênfase foi para a análise das abstrações surgidas no processo de resolução da tarefa, que propiciaram a elaboração de sínteses voltadas para a apropriação das relações de multiplicidade e divisibilidade entre a unidade básica e a unidade intermediária. Como vimos anteriormente, tais relações constituem a essência do conceito de fração.

A próxima tarefa envolve aspectos similares àqueles apresentados na anterior, pois continua com o processo de análise das relações de multiplicidade e divisibilidade entre as medidas básicas e intermediárias. Porém, a diferença incide no movimento do pensamento, isto é, sai das limitações das representações sensoriais para penetrar nas relações internas que passam a ser abstraídas mediante a análise dos esquemas de setas (modelação gráfica).

Tarefa 4:

“Representar na malha quadriculada as áreas T e B” (Горбоб et al., 2006, p. 32), conforme a figura 39:

Figura 39 – Dados referentes à tarefa 4



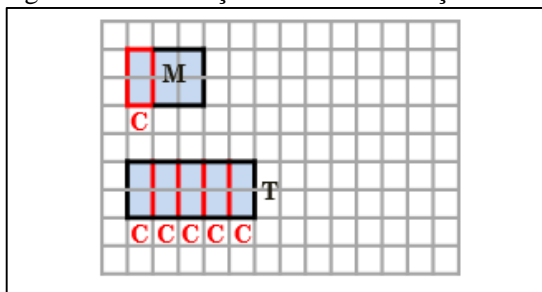
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбоб et al. (2011).

Para a representação das respectivas áreas (T e B), a orientação é para que os estudantes adotem as medidas intermediárias (C e H) como base do processo de medição. Essa finalidade se apresenta, uma vez que os esquemas não indicam a quantidade de vezes que M cabe (ou se repete) por completo em ambas as grandezas. Mesmo com essa ausência, as áreas T e B são passíveis de representação pela análise dos esquemas de setas

(ГОПБОВ et al., 2006). Neles se refletem as relações internas – de multiplicidade e de divisibilidade – entre as grandezas: unidade básica, unidade intermediária e total de medidas básicas.

No primeiro esquema, observa-se que as setas indicam a medida básica M como sendo maior que a intermediária C , isto é, $M > C$. Essa abstração é referência para o seguinte questionamento, pelo professor, aos estudantes: Como proceder na representação, na malha quadriculada, da grandeza de área T a partir da medida intermediária C ? A pergunta é proposital, pois o desenvolvimento da situação requer, por parte do estudante, a adoção do *método novo*, isto é, consiste na divisão em partes iguais da medida básica para a obtenção da medida intermediária (ГОПБОВ et al., 2006). Tal necessidade instiga a constatação de dividir a unidade básica M em 3 partes iguais e adota-se uma das partes como medida intermediária C . A partir dela e com a indicação do esquema – por meio das setas – de que a mesma deve se repetir por 5 vezes, a fim de obter o total de medidas básicas T (Figura 40).

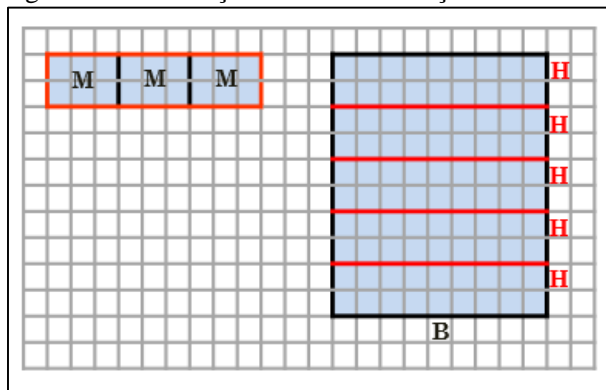
Figura 40 – Resolução da tarefa 4: adoção do método novo



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбoв et al. (2006).

No segundo esquema, a abstração $M < H$ é própria do *método antigo*, uma vez que a medida intermediária é obtida pela repetição (quantidade de vezes) da unidade básica. Mesmo sendo uma representação de maior familiaridade dos estudantes, um concreto pensado, o professor deverá questioná-los: Como proceder a representação, na malha quadriculada, da grandeza de área B a partir da medida intermediária H ? Por se tratar de uma situação similar a outras tantas desenvolvidas desde o segundo ano escolar, pressupõe-se que os estudantes, ao realizarem a análise do esquema, abstraíam que a unidade básica M se repete por 3 vezes. Por extensão, a medida intermediária ($H=3M$) se repete por 5 vezes, o que resulta no total de medidas básicas B (Figura 41).

Figura 41 – Resolução da tarefa 4: adoção do método antigo



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

A resolução da tarefa, permeada de interações entre o professor e os estudantes, oportuniza uma consideração conclusiva de que, no processo de medição, existem duas etapas comuns, independentemente do método (antigo ou novo): 1) a construção da medida intermediária, a partir da medida básica; 2) a medição da grandeza com a medida intermediária (ГОПБОВ et al., 2006).

Mas, é importante a observação para o detalhe de que a diferença entre os dois métodos reside na primeira etapa. No método antigo, construía-se a medida intermediária pela repetição da medida básica. Por sua vez, no método novo, a referida construção ocorre pela divisão em partes iguais da medida básica. Na segunda etapa, não há peculiaridades de um ou de outro método, pois ambos estabelecem a mesma relação entre as grandezas – quantidade de vezes que a medida intermediária se repete para obtenção do total de medidas básicas (ГОПБОВ et al., 2006).

Destacamos que, nesse estágio de desenvolvimento da tarefa 4, o pensamento se move mediado por abstrações articuladas com a análise dos esquemas, que propiciam a revelação da relação essencial do conceito de fração. Isso porque o esquema “[...] é representativo do movimento da relação entre as grandezas” que possibilita, aos estudantes, a elevação do plano objeto ao plano mental, mediado pela representação gráfica (ROSA, 2012, p. 104).

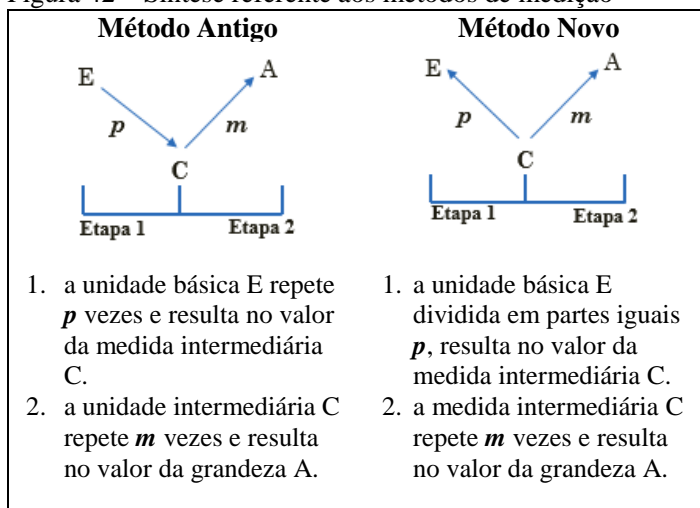
A tarefa 5, a seguir detalhada, possibilita a elaboração do resumo referente à relação entre os métodos – antigo e novo – com o registro das crianças dos textos relevantes (ГОПБОВ et al., 2006).

Tarefa 5:

“Comparar a antiga e a nova forma de adoção das medidas intermediárias no processo de medição de quantidades. Descrivê-las em etapas” (ГОРБОВ et al., 2006, p. 32-33).

A orientação é para que os estudantes registrem as etapas do processo de análise dos métodos – antigo e novo –, mais especificamente sobre a adoção de medidas intermediárias (Figura 42).

Figura 42 – Síntese referente aos métodos de medição



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Observa-se que a tarefa 5 trata do processo de generalização do novo método de medição. Resulta, pois, dos procedimentos de análise e síntese desenvolvidos em tarefas anteriores (3 e 4), organizadas de modo que colocam os estudantes em movimento de pensamento, que segue do concreto sensorial à revelação da relação essencial que, posteriormente, desempenhará o papel de abstração inicial.

É importante enfatizar que o novo método surge mediante a análise dos métodos antigos, o que permite ao estudante separar os indícios essenciais para a generalização de um novo conceito. Vale dizer que, para Davidov (1988, p. 153), o conceito “[...] constitui o procedimento e o

meio da reprodução mental de qualquer sistema integral”⁷⁴. Em outras palavras,

O *conceito* intervém aqui como forma da atividade mental mediante o qual se reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas conexões, que refletem em sua unidade *a generalidade e a essência* do movimento do objeto material. O conceito aparece por sua vez como forma do reflexo do objeto material, e como meio de sua reprodução mental, de sua estrutura, ou seja, como singular **operação mental** (DAVÝDOV, 1982, p. 300, grifos do autor)⁷⁵.

Nesse contexto, a generalização do novo método traz como ideia conceitual, central, a subdivisão da unidade de medida, que se caracteriza pela relação de divisibilidade da medida básica para construção da medida intermediária. Por extensão, ela é adotada para a obtenção do total de medidas básicas, dado pela relação de multiplicidade. Por se tratar de uma ideia conceitual, a ênfase no processo de cognição é para as relações internas e não mais para as relações sensoriais dadas apenas pela observação direta das grandezas.

A tarefa subsequente traz um novo componente para o referido método – a nomenclatura da parte que corresponde à medida intermediária – que possibilitará ao estudante realizar a leitura da fração. Tal significação é introduzida mediante a análise de diferentes quantidades e unidades (ГОРБОВ et al., 2006).

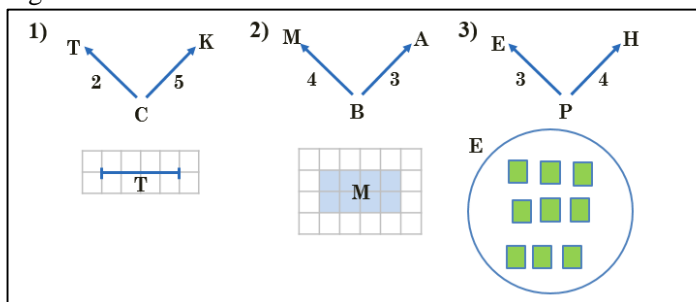
Tarefa 6:

“Medir as grandezas com a unidade especificada em cada caso” (ГОРБОВ et al., 2006, p. 33), de acordo com a figura 43.

⁷⁴ [...] el concepto constituye el procedimiento y el medio de la reproducción mental de cualquier objeto como sistema integral (DAVÝDOV, 1988, p. 153).

⁷⁵ El *concepto* interviene aquí como forma de la actividad mental mediante la cual se reproduce el objeto idealizado y el sistema de sus conexiones, que reflejan en su unidad *la generalidad y la esencia* del movimiento del objeto material. EL concepto aparece a la vez como forma de reflejo del objeto material, y como medio de su reproducción mental, de su estructura, o sea, como singular **operación mental** (DAVÝDOV, 1982, p. 300, grifos do autor).

Figura 43 - Dados referentes à tarefa 6



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

A tarefa 6 tem como elemento mediador de análise o esquema representativo, abstrato, que imprime o movimento requerido pelo novo método de medição generalizado. Ela sugere que os estudantes interpretem o esquema e, para tal, apresenta as seguintes informações: 1) a quantidade de vezes que a unidade básica deverá ser dividida para a obtenção da medida intermediária; 2) a quantidade de vezes que esta (nova unidade) se repetirá para obtenção da grandeza a ser medida (ГОРБОВ et al., 2006). A generalização possibilita que o estudante construa a medida intermediária (C, B e P) e, posteriormente, adote-a como nova unidade no processo de medição, para a obtenção das respectivas grandezas (K, A e H).

A tarefa compõe-se de três situações. Na primeira, o esquema (Figura 43) indica que a unidade básica T (composta por 4 unidades de comprimento) deve ser dividida em 2 partes iguais. Toma-se uma delas (composta por 2 unidades de comprimento) como medida intermediária C, que se repetirá por 5 vezes, a fim de se obter o segmento correspondente à grandeza de comprimento K (composta por 10 unidades de comprimento).

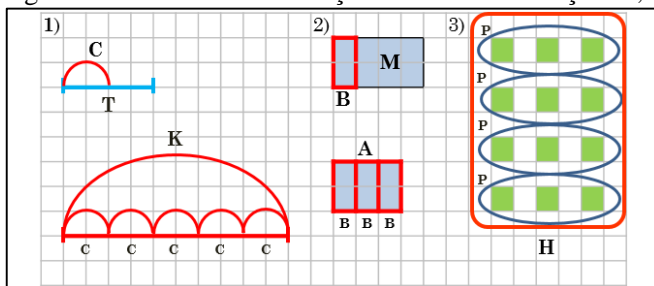
A segunda situação tem M como unidade básica (composta por 8 quadrados da malha), a ser dividida em 4 partes iguais. Uma delas corresponde à medida intermediária B (composta por 2 quadrados da malha), que é considerada uma parte. Esta se repete por 3 vezes e obtém-se a grandeza de área A.

A terceira situação estabelece E como unidade básica. Ela se diferencia em relação às demais situações, pois suas unidades são discretas (composta por 9 quadrados). O esquema indica que se façam agrupamentos, cada qual com 3 unidades. Um deles é adotado como

medida intermediária P, uma parte, que se repete por 4 vezes, a fim de se obter o agrupamento H (correspondente a 12 unidades discretas).

Nesse sentido, o movimento do pensamento que expressa o processo de medição das três situações é representado na figura 44.

Figura 44 – Processo de medição da tarefa 6: situações 1, 2 e 3



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопѳов et al. (2011)

Os resultados obtidos, darão subsídios ao professor para a formulação do seguinte questionamento: As medidas intermediárias (C, B e P) correspondem, respectivamente, a que parte das medidas básicas (T, M e E)? Essa pergunta tem por finalidade direcionar o pensamento dos estudantes para a apropriação da nomenclatura das partes. Segundo Гопѳов et al. (2011, p. 34), “se a unidade básica é dividida em partes iguais, uma tal parte é chamada de valor da fração”. Isso significa dizer que o nome da fração vai depender da quantidade de vezes, em partes iguais, que foi dividida tal unidade. Desse modo, se a medida básica for dividida em:

[...] duas partes iguais, uma parte é chamada **segunda parte** ou **metade**; três partes iguais, uma parte é chamada **terceira parte** ou **um terço**; quatro partes iguais, uma parte é chamada **quarta parte** ou **um quarto**; cinco partes iguais, uma parte é chamada **quinta parte** ou **um quinto**; seis partes iguais, uma parte é chamada de **sexta parte** ou **um sexto**, etc. (ГОПѳОВ et al., 2011, p. 34, grifos do autor).

Portanto, a ênfase na resolução da tarefa é para a apropriação do significado de parte – para medida intermediária –, pois é ela, segundo Гопѳов et al. (2006), que possibilitará a identificação e a determinação do valor da fração.

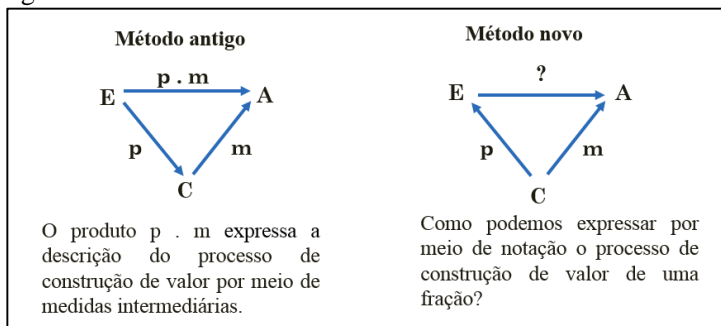
Contudo, vale enfatizar que nessa etapa do desenvolvimento, a fração não se caracteriza pelo seu aspecto numérico, isto é, como resultado do processo de medição. Portanto, ainda aparece como descrição do método de medição, o que torna possível a realização da leitura das partes (medida intermediária). Assim sendo, as medidas intermediárias C, B e P correspondem, respectivamente, à metade da unidade T, à quarta parte da unidade M e à terça parte da unidade E.

A próxima tarefa apresenta uma nova descrição referente ao novo método de medição. Trata-se, pois, da introdução da relação direta entre a unidade básica e a grandeza a ser medida.

Tarefa 7:

“Pense em uma notação abreviada (figura 45) para uma nova forma de representação de valores” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 36).

Figura 45 – Dados referentes à tarefa 7



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

A tarefa 7 apresenta a introdução da modelação literal da relação essencial do conceito de fração. Trata-se, portanto, do estágio atual do processo de formação do modelo universal – do referido conceito – que consiste na passagem da representação gráfica para a literal.

Segundo Горбов et al. (2006), a atenção se volta para o método novo, uma vez que os estudantes desconhecem a relação direta que expressa a medição da grandeza pela unidade básica. Vale enfatizar que tal relação ($E \rightarrow A$) encontra-se mediada por outras duas relações: construção da medida intermediária, a partir da medida básica ($E \leftarrow C$) e a medição da grandeza pela medida intermediária ($C \rightarrow A$). Isso significa que se obtém o total de medidas básicas pela relação entre fatores p e m ,

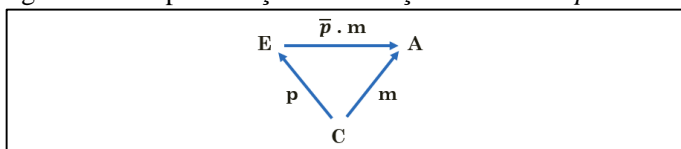
que representam o registro dos valores das respectivas relações de medição ($E \leftarrow C$ e $C \rightarrow A$).

Conforme a figura 45, no método antigo, a representação do total de medidas básicas ocorre pelo produto $p \times m$, em que p consiste na unidade intermediária e m na quantidade de vezes da repetição. Vale lembrar que no estudo da multiplicação, em anos anteriores, os estudantes se apropriaram da propriedade comutativa: a ordem dos fatores não altera o seu resultado ($p \times m = c$ é $m \times p = c$). De acordo com Гопѳов et al. (2006), tal apropriação lhes permite interpretar o modelo e compreender que os respectivos fatores apresentam uma mesma função: p como *repetição* da medida básica para a obtenção da medida intermediária e m como *repetição* da medida intermediária para a obtenção da grandeza a ser medida. Aqui se apresenta uma diferença em relação ao método antigo em que não havia a necessidade de distinção dos fatores p e m .

Na análise de tarefas anteriores, vimos que o método novo também se diferencia do antigo na primeira etapa do processo de medição no que diz respeito à construção da medida intermediária. Isso porque sua função consistia na divisão da unidade básica em partes iguais. Na segunda etapa, a função é a repetição da unidade intermediária, de modo análogo àquele desenvolvido no método antigo. A representação do total de medidas básicas requer que o estudante estabeleça uma simbologia capaz de diferenciar as respectivas funções dos fatores p e m . A condição dessa criação é que o símbolo corresponda ao fator que diferencia os métodos, que indique a divisão das unidades (ГОПѳОВ et al., 2006).

Para tanto, a tarefa sugere que os estudantes criem um símbolo em relação à análise dos fatores: p com a função de divisão e m de repetição. Гопѳов et al. (2006) chamam atenção para o estabelecimento da ordem que se apresentarão essas funções, pois a sua alteração implica na transformação, disposição das setas, que implicará na mudança no esquema e, consequentemente, na operação entre as grandezas. Entretanto, não é na tarefa 7 que ocorre a explicitação de tal alteração. Essa possibilidade se apresentará na tarefa 9.

No processo de criação, é possível que os estudantes apresentem variedades de símbolos que serão considerados como válidos. Contudo, cabe ao professor sugerir a representação padrão que se estabeleceu historicamente. Trata-se de um traço, denominado por Гопѳов et al. (2006) de barra da fração, sobre o fator \bar{p} que divide a unidade básica, conforme mostra a figura 46.

Figura 46 – Representação da distinção dos fatores p e m 

Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

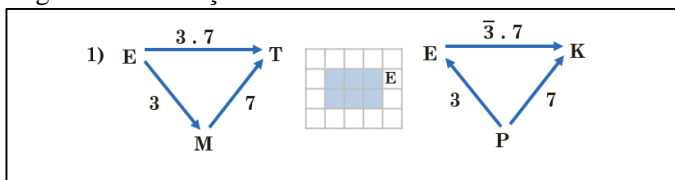
Estamos diante, pois, da representação das relações internas – divisão em partes iguais da unidade básica (\bar{p}) e repetição da medida intermediária (m) – que propiciarão a reprodução do modelo universal que se apresentará na tarefa 10. Mas vale lembrar que o alcance de tal modelo universal só é possível se os estudantes se apropriaram das relações de subdivisão da unidade e repetição da medida intermediária, representadas na figura 46 (ГОПБОВ et al, 2006).

A tarefa 8 traz duas situações particulares que direcionam o pensamento dos estudantes para essa apropriação.

Tarefa 8:

“Construa as grandezas T e K, adotando a unidade E” (ГОПБОВ et al., 2011, p. 36), conforme as figuras 47 e 49:

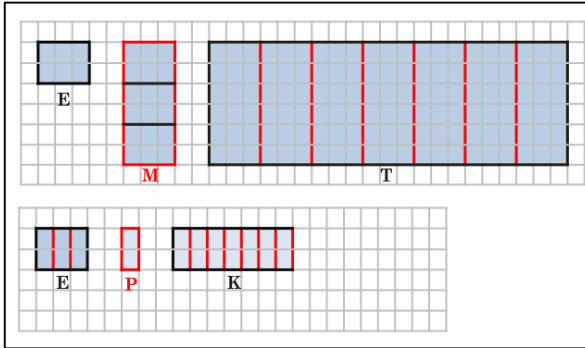
Figura 47 – Situação 1 da tarefa 8



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

A situação 1 trata da descrição detalhada dos métodos de medição. Assim sendo, cabe ao estudante orientar-se por meio dos registros, para a construção da representação das grandezas T e K (Figura 48).

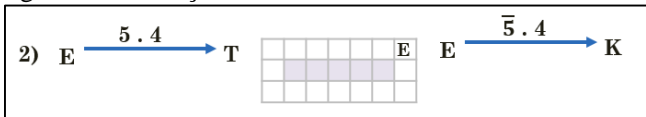
Figura 48 – Resolução da situação 1 da tarefa 8



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

De acordo com Гопбоб et al. (2006), na resolução da situação 1, figura 48, os estudantes não encontrarão dificuldades, pois mesmo que não adotem a relação direta entre a medida básica e a grandeza, eles poderão utilizar as relações de medida intermediária, já apropriadas em tarefas anteriores. No entanto, a situação 2 não traz os modelos detalhados, somente a relação direta, conforme a figura 49.

Figura 49 - Situação 2 da tarefa 8



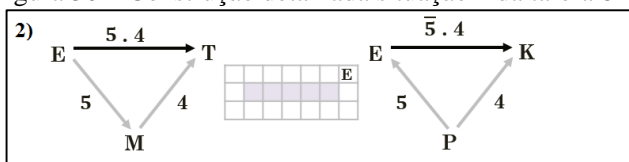
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

Para a construção das respectivas grandezas (T e K), faz-se necessária a análise dos fatores quanto às suas funções: divisão e repetição das grandezas. Para tanto, o professor sugere aos estudantes que reestabeleçam a notação detalhada, para posterior análise (ГОПБОВ et al., 2006).

Observa-se, na relação de medição da grandeza T, que os fatores (5 e 4) não apresentam nenhuma distinção. Isso significa que ambos possuem a função de repetição, ou seja, a relação que determinará T é a mesma adotada pelo método antigo. Assim sendo, o fator 5 corresponde à quantidade de vezes que a medida básica se repete para a obtenção da medida intermediária. O 4 indica a quantidade de vezes de repetição da medida intermediária, a fim de determinar a grandeza desejada.

Por sua vez, a construção da grandeza K implica na distinção dos fatores. Em outras palavras, o fator 5 – representado com barra – corresponde ao registro que manifesta a divisão da unidade em partes iguais. Nesse caso, a unidade intermediária corresponde à quinta parte da unidade básica. O fator 4 indica a quantidade de vezes em que a quinta parte se repete para a obtenção da grandeza K. Essas abstrações são passíveis de representação na forma detalhada (Figura 50).

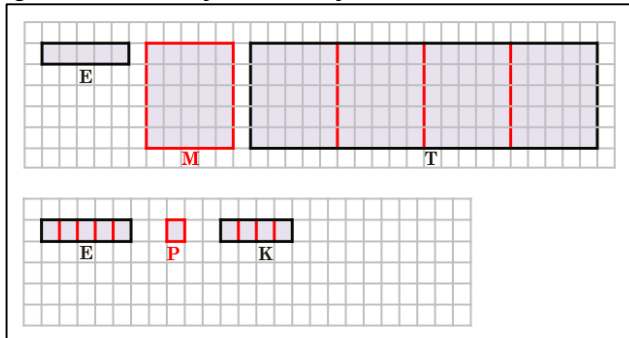
Figura 50 – Construção detalhada situação 2 da tarefa 8



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006), a resolução da situação 2 é similar à adotada na situação 1 (Figura 51).

Figura 51 - Resolução da situação 2 da tarefa 8



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Percebe-se, pois, que ambas as situações possuem características que promovem a apropriação da relação direta entre medida básica e grandeza (ГОПБОВ et al., 2006). Contudo, têm algumas peculiaridades, pois a situação 1 direciona o pensamento dos estudantes para a execução da medição. A situação 2 requer dos estudantes a construção detalhada das relações pertinentes a cada método de medição. No entanto, de acordo com Гопбоб et al. (2006), as duas situações trazem a operacionalização interna da medida intermediária, de forma que, em consecutivas

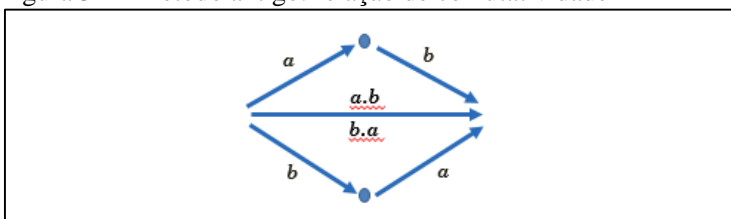
aplicações, os estudantes passem à resolução de situações similares sem recorrer à construção gráfica do modelo.

A próxima tarefa ainda se refere à análise dos métodos (antigo e novo), com foco para a relação de comutatividade entre os fatores a e b .

Tarefa 9:

“O produto dos fatores pode ser trocado entre si” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 37), como apresentado na figura 52.

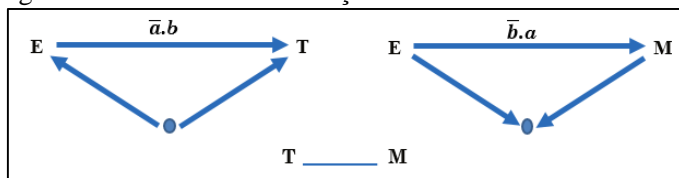
Figura 52 – Método antigo: relação de comutatividade



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

O enunciado da tarefa é completado com um questionamento, seguido de orientação: “É possível para um novo método de medição a comutação de \bar{a} (a divisão em partes iguais) e b (a repetição de b vezes)? Verifique o seu palpite e complete a construção (escolher a unidade E e os diferentes números a e b)” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 37).

Figura 53 – Método novo: relação de comutatividade



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

Quanto ao esquema (Figura 52), o professor enfatizará que, no método antigo, é possível alternar a ordem dos fatores, porque isso não modificará o produto (ГОРБОВ et al., 2006). Satisfaz, pois, a propriedade comutativa da multiplicação. Portanto, não há necessidade de exemplificar tais relações, uma vez que se trata de algo familiar aos estudantes, presente em outras tarefas e desenvolvidas em anos anteriores.

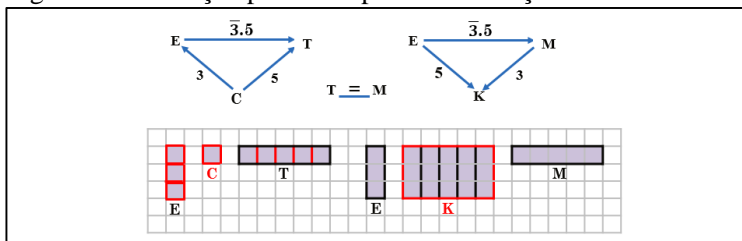
Ou seja, a propriedade comutativa se caracteriza como um concreto pensado.

No que diz respeito ao método novo, os estudantes são convidados a identificar a hipótese, implícita no enunciado da tarefa, de que nele também é válida a propriedade comutativa. Para tanto, a orientação é para que eles analisem alguma situação particular, estabelecendo uma unidade de medida (E) e números para a e b (ГОРБОВ et al., 2006). Assim, a resolução dessa situação é direcionada pela análise dos esquemas (Figura 53).

Antes, porém, o professor retoma a discussão sobre a ordem dos fatores, que no método antigo possuem a função de repetição e não alterarão o esquema. Isso porque ambos refletem o mesmo movimento no pensamento – quantidade de vezes que a unidade se repete – seja para a obtenção da medida intermediária ou para obtenção da grandeza a ser medida. No método novo, ao mudar a ordem dos fatores, o esquema sofre transformações. Implica, portanto, na modificação das etapas do processo de medição. As relações (função e ordem) são indispensáveis para que os estudantes confirmem ou rejeitem a hipótese proposta durante o desenvolvimento inicial da tarefa.

Como ilustração, apresentamos na figura 54 uma suposta situação de desenvolvimento da tarefa.

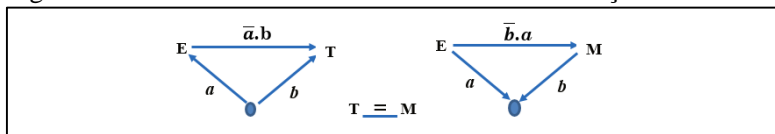
Figura 54 – Situação particular para a verificação da comutatividade



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Na sequência, completa-se os esquemas (Figura 55) com a explicitação do movimento do pensamento desenvolvido para a confirmação da hipótese.

Figura 55 – Comutatividade do novo método de medição



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

Observa-se, na figura 54 e figura 55, que é válida a propriedade comutativa para o método novo ao se considerar no processo de medição as funções dos fatores em detrimento do número registrado por a e b . Assim sendo, \bar{a} e \bar{b} representam o mesmo registro $\bar{3}$, que corresponde, respectivamente, à divisão da medida básica e intermediária. Por sua vez, os fatores a e b – sem a barra – representam o registro 5, que significa, respectivamente, a repetição da medida intermediária e da medida básica (ГОПБОВ et al., 2006).

A tarefa tem por objetivo que, após o processo de medição, os estudantes, sob a orientação do professor, elaborem algumas conclusões. Гопбоб et al. (2006) consideram que a principal delas diz respeito à possibilidade de adoção da propriedade comutativa, o que implica na tomada de decisão de qual operação será tomada primeiro. Se a operação inicial for a divisão – a mais convencional para o conceito de fração – então a medida básica é subdividida e a medida intermediária se repete. Se inicialmente se adota a multiplicação, então quem se repetirá é a medida básica e, conseqüentemente, a medida intermediária é que se divide.

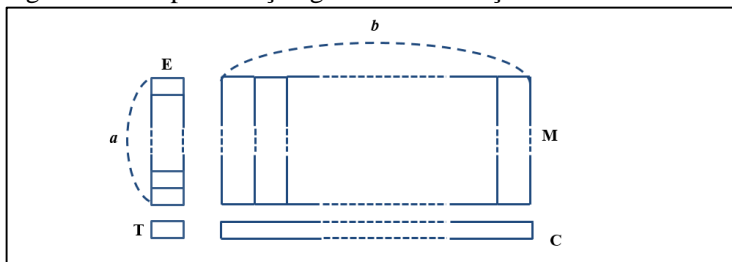
A tarefa 10 traz como finalidade principal que os estudantes se apropriem da generalização teórica do novo método de medição, condição para a apropriação do sistema conceitual de fração. Esse processo se caracteriza pela reprodução das relações internas que expressam a conexão geneticamente inicial, isto é, modelo universal. Conforme Давидов (1988), a modelação da relação universal, a lei, se revela gradativamente pela modelação objetual, gráfica e literal.

Tarefa 10:

Essa tarefa tem como referência a figura 56. Seu enunciado é: “O desenho mostra, esquematicamente, como a grandeza de área C é medida com a unidade E a partir da adoção da:

- 1) medida intermediária T;
- 2) medida intermediária K [M]” (ГОПБОВ et al., 2011, p. 37-38).

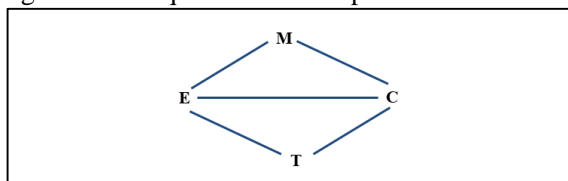
Figura 56 – Representação geométrica: relação de comutatividade



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбoв et al. (2011).

Além do enunciado anterior, a tarefa também propõe: “Descrever as duas formas de construir um esquema” (Гопбoв et al., 2011, p. 38), tendo por referência o esquema, figura 57.

Figura 57 – Esquema a ser completado na tarefa 10



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбoв et al. (2011).

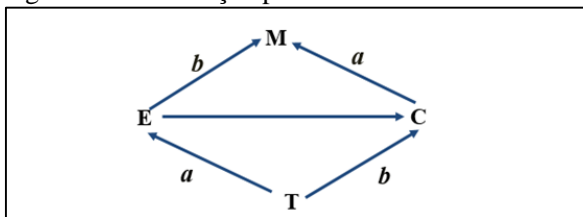
No desenvolvimento dessa tarefa, adotar-se-á o procedimento de análise contrário em relação à anterior, que requeria a ação gráfica como mediação para a representação objetiva. Гопбoв et al. (2006) propõem a análise geométrica (objetal), apresentada na figura 56, como relação mediadora para a abstração da comutação dos fatores a e b , representados no esquema (gráfica), figura 57. Tem como objetivo a introdução da notação convencional para o novo método, expresso na forma literal.

Para Гопбoв et al. (2006), a participação do professor no desenvolvimento da tarefa é essencial, uma vez que está em cena a apropriação, pelos estudantes, do novo método de medição em sua forma generalizada. A atenção centra-se no movimento do pensamento a ser desenvolvido pelos estudantes, de modo que eles se apropriem das relações internas que constituem a essência e, por conseguinte, revelem a base universal.

Nesse sentido, a primeira relação a ser abstraída pelo estudante consiste em medir a grandeza C com a unidade E , dada no enunciado da tarefa. As demais relações, fixadas no esquema, são abstraídas mediante

a análise das grandezas, apresentadas na forma sensorial. Para tanto, o professor recomendará a comparação sensorial das áreas E, T, M e C para a obtenção da indicação das setas a serem representadas no esquema. Por meio da análise, é possível a verificação de que a grandeza T é a menor de todas as áreas. As verificações se constituem em elementos que possibilitam que os estudantes abstraíam as relações $E > T$ e $C > T$. Mas isso não é suficiente quando se quer atingir o nível de pensamento teórico. Por isso, conclama por orientação do professor que lançará o seguinte questionamento: Quais os fatores que caracterizam essas relações? A questão incita os estudantes à análise das relações $E > T$ e $C > T$ com fundamento na ideia essencial, a fim de constatarem que, respectivamente, T se repete a vezes em E e b vezes em C. Do mesmo modo, estabelecem outras relações ao se considerar a maior de todas as grandezas (M), isto é, $M > E$ e $M > C$. Na primeira, o fator b corresponde à quantidade de vezes que E se repete em M. Enquanto na segunda relação, $M > C$, o fator a é representativo da quantidade de vezes que C se repete em M. A representação dessas abstrações se apresenta no esquema da figura 57 e, por decorrência da análise, toma a forma da figura 58.

Figura 58 – Resolução parcial da tarefa 10



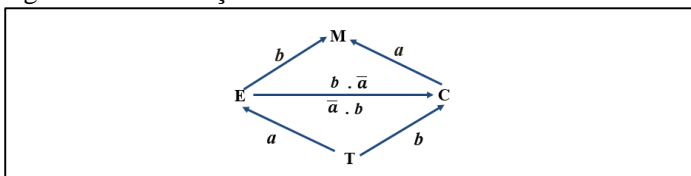
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбoв et al. (2006).

No entanto, ainda falta determinar a representação da relação direta entre a unidade E e a grandeza C, mediadas pelas medidas intermediárias T e M. Nesse caso, trata-se da análise da função e da ordem dos fatores, que foram foco na tarefa anterior.

Quando a referência é a medida intermediária T, o fator a apresenta função de subdivisão da unidade E e b a de repetição de T em C. A relação direta ($E \rightarrow C$) representa-se por: $\bar{a}.b$. Por sua vez, quando o foco da análise é a medida intermediária M, as funções dos fatores – que levam à obtenção da grandeza C – são: b de repetição da unidade E e a de subdivisão. A relação direta ($E \rightarrow C$) é descrita por: $b.\bar{a}$.

Convém frisar que ambas as representações da relação direta (Figura 59) expressam a comutatividade dos fatores a e b , pois, ao mudar a ordem deles, não há alteração no resultado da medição da grandeza C .

Figura 59 – Resolução da comutatividade da tarefa 10

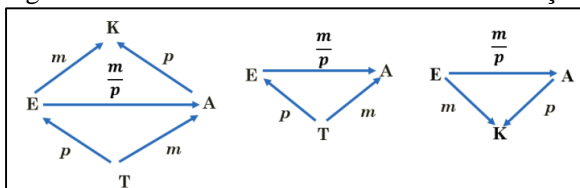


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопѳов et al. (2006).

O esquema dá subsídios para a observação de que a relação direta ($E \rightarrow C$) possui duas representações: $\bar{a} \cdot b$ e $b \cdot \bar{a}$. Essa dupla possibilidade é ressaltada pelo professor, com a indicação de que elas conduzirão a nova generalização. Ou seja, é possível realizar a unificação dos fatores de modo que se tornem apenas um. Nesse momento, o professor fará o seguinte registro no quadro: $\frac{b}{a}$. Além disso, explicará que se trata da representação literal, caracterizadora do número racional que, no caso, denomina-se de fração ordinária. Trata-se, pois, da divisão de dois números inteiros (a e b , sendo a não nulo) de modo que, se b for divisível por a o número $\frac{b}{a}$ coincide com o número inteiro, por sua vez, se b não for divisível por a o número se diz fracionário (CARAÇA, 2002).

É importante destacar que o registro $\frac{b}{a}$ representa não apenas o número em forma de fração (como resultado da medição de grandezas), mas também é expressão do método de medição (divisão não exata). Em outras palavras, consiste na lei geral para a obtenção dos números racionais, pois manifesta as relações internas de seu desenvolvimento: a subdivisão e a repetição das unidades (básica e intermediária), conforme figura 60, com a adoção de m e p , em vez de a e b .

Figura 60 – Modelo universal do conceito de fração



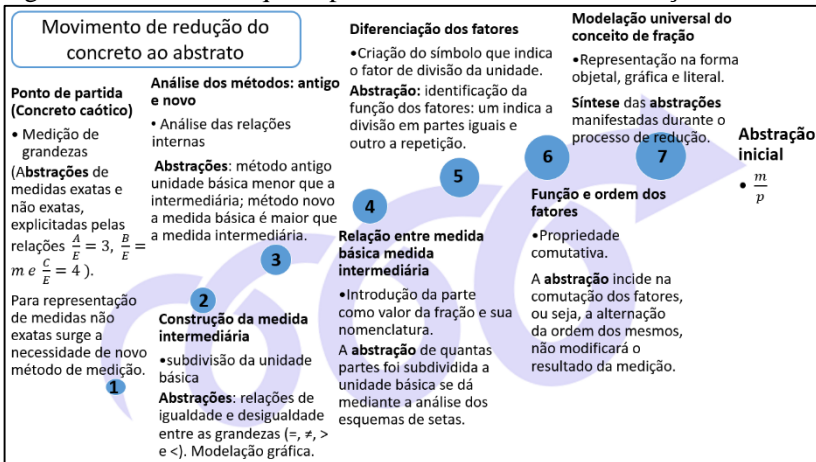
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопѳов et al. (2011).

Ainda, na continuidade, compete ao professor a indicação da nomenclatura, bem como a reafirmação do significado de cada letra da representação:

O número **p**, que se localiza abaixo do traço da fração, é chamado **denominador**. O denominador indica o valor da divisão (da unidade básica) em partes iguais. Ele mostra em quantas partes iguais se dividiu essa quantidade (E ou K). O número **m**, valor acima do traço, é chamado **de numerador**. O numerador indica o valor da repetição. Ele mostra o número de vezes que é necessário repetir o valor da parte T ou da unidade E. A Linha de separação ou o traço entre o numerador e o denominador é chamada **barra** (ГОРБОВ et al., 2011, p. 38, grifos do autor).

Desse modo, $\frac{m}{p}$ se traduz no modelo universal do conceito de fração. Ele reflete, no pensamento, o movimento – de abstração e de generalização – da essência, revelada durante o desenvolvimento do sistema de tarefas particulares. Como síntese de todo o movimento de redução do concreto ao abstrato, elaboramos um esquema (Figura 61), que fecha a presente seção.

Figura 61 – Processos que explicitam o movimento de redução



Fonte: Da autora.

O esquema (Figura 61) procura explicitar os processos (análise e sínteses) do pensamento necessários para a resolução das dez tarefas representativas do que consideramos reveladoras do movimento de redução do concreto ao abstrato. A sequência desses processos é identificada pela numeração de 1 a 7. Em cada qual, indica as particularidades/finalidades, bem como dá destaque para a respectiva abstração.

3.2 AS TAREFAS GERADORAS DO MOVIMENTO DO ABSTRATO AO CONCRETO DO PENSAMENTO CONCEITUAL

Na presente seção, a referência de análise são algumas tarefas particulares que dão mostras da explicitação do movimento de ascensão do abstrato ao concreto, referentes à apropriação do sistema conceitual de fração. Trata-se, pois, do movimento oposto àquele analisado na seção anterior, pois, neste estágio, o pensamento segue da definição abstrata para a reprodução da diversidade dos fenômenos concretos (ROSENTAL, 1962). Porém, vale reafirmar que, segundo Dávidov (1988), o referido movimento ocorre em unidade com o processo de redução. Em outras palavras, para a reprodução mental do concreto, faz-se necessário elevar o pensamento – por via de abstrações e generalizações teóricas – do concreto sensível para sua base universal, que traduz a unidade de todas as manifestações do objeto estudado.

Como vimos anteriormente, a base universal do conceito de fração se revela por meio do modelo abstrato que é expresso na forma $\frac{m}{p}$, em que p é o *denominador* e indica o valor da divisão em partes iguais (da unidade) e m o *numerador* que expressa o valor da repetição (para obtenção da grandeza a ser medida). Tal modelo se caracteriza como abstração inicial, substancial, uma vez que reflete a essência, ou seja, a causa do desenvolvimento do conceito de fração.

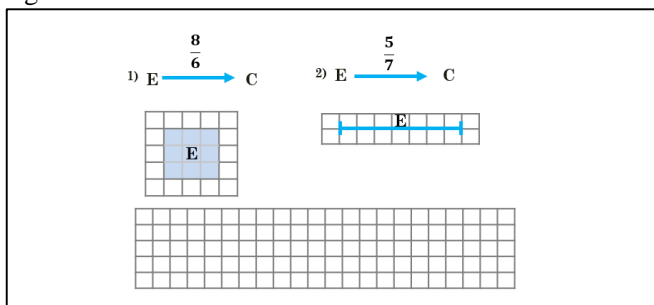
Após a revelação da relação essencial em sua forma abstrata é que o pensamento segue o movimento da abstração inicial (manifestação da lei) para o estudo da diversidade dos fenômenos, a fim de alcançar a generalização, propriamente dita, do conceito, neste caso, de fração. É para atingir tal finalidade que as tarefas particulares, a seguir, estão organizadas. De acordo com Rosa (2012, p. 51), isso ocorre quando os estudantes detectam “[...] a vinculação regular da relação principal [essencial] com suas manifestações particulares [...]”. Para tanto, no processo de resolução, os estudantes, a partir do procedimento geral (expresso pelo modelo universal), analisam as manifestações particulares,

de modo que compreendam as formas concretas de revelação da base universal.

Tarefa 11:

“Construa a grandeza C com a unidade E, de duas maneiras” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 39), conforme indica a figura 62.

Figura 62 – Dados referentes à tarefa 11



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

A tarefa apresenta duas situações particulares: uma que envolve a grandeza área e outra a grandeza comprimento. Em cada uma delas aparecem os respectivos registros, $\frac{8}{6}$ e $\frac{5}{7}$, que expressam a quantidade de vezes que a unidade E cabe na grandeza C.

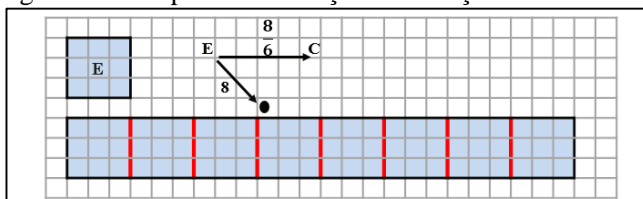
A tarefa 11 se desenvolve em contexto conceitual similar à tarefa 8, pois adota o mesmo processo de medição – divisão e repetição da unidade. A diferença entre ambas está na representação do total de medidas básicas. Na tarefa 8, o total de medidas básicas é representado pelos fatores, $\overline{a} \cdot b$, cuja finalidade incide na revelação das relações internas do novo método de medição, que propiciam a reprodução do modelo universal. Por sua vez, na tarefa 11, a relação entre a unidade e a grandeza a ser medida aparece como resultado da medição, obtido mediante a generalização do modelo universal. Nessas tarefas, representa-se a grandeza C na forma objetual (expressas na malha quadriculada).

No âmbito das relações internas é que se traduz a busca pela compreensão da lei, expressão da base universal do conceito de fração. Assim sendo, nas duas situações da tarefa 11, a caracterização do processo de ascensão ocorre quando os estudantes manifestarem que o denominador é o fator de divisão (tanto da unidade básica, quanto da

intermediária, dependendo da relação que estabelece no processo de medição).

Na situação 1 da tarefa 11, conforme Гопбоб et al. (2006) é possível a abstração, pelos estudantes, de que a unidade intermediária é constituída da sexta parte da unidade básica e que se repete por 8 vezes para a construção da grandeza C. Contudo, constatarão que essa relação torna-se incômoda para a execução da situação, pois a unidade básica é composta por nove quadrados da malha, não sendo possível dividi-la em seis partes iguais. Surge, pois, um impasse: Como proceder na representação da grandeza C, uma vez que E não pode ser dividido em seis partes iguais? Caso nenhum estudante encontre a solução, o professor esclarecerá a possibilidade do emprego da propriedade comutativa, o que implica na alternância das operações. Desse modo, ao invés de dividir a unidade E, existe a alternativa de sua repetição por 8 vezes, conforme figura 63.

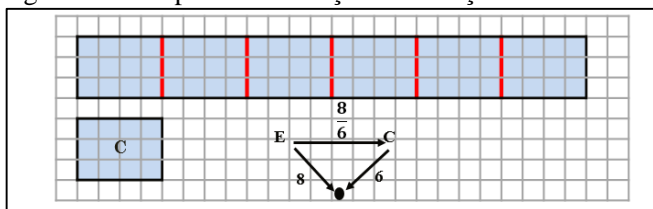
Figura 63 – Etapa 1 da resolução da situação 1 da tarefa 11



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Em consequência dessa repetição, obtém-se um dado que permitirá a conclusão da tarefa: constrói-se uma área composta por 72 quadrados (da malha), que dá subsídios para a adoção da alternância da operação. Por conseguinte, divide-se essa área em 6 partes iguais e toma-se a sexta parte como medida da grandeza C, conforme a figura 64 (ГОПБОВ et al., 2006).

Figura 64 – Etapa 2 da resolução da situação 1 da tarefa 11

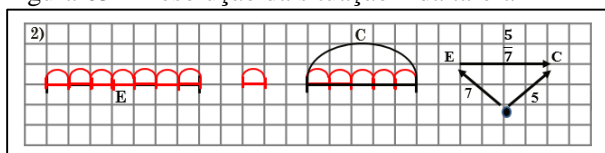


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Vale esclarecer que a finalidade da tarefa é a relação entre E e C, isto é, a construção da grandeza C. Portanto, não há preocupação de explicitação do valor, ou seja, do resultado numérico da medida.

Na situação 2, há a possibilidade de os estudantes perceberem que não há necessidade de adotar a propriedade comutativa para a sua resolução. Isso porque, com a orientação do professor, ao analisarem o registro (Figura 62), eles verificarão por meio do esquema, que a unidade E pode ser dividida em sete partes iguais (ГОРБОВ et al., 2006). Cada uma delas se repete por 5 vezes para a construção da grandeza C (Figura 65).

Figura 65 – Resolução da situação 2 da tarefa 11



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

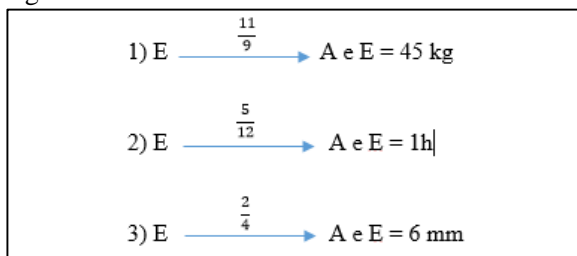
No processo de resolução das situações 1 e 2, foi possível constatar que o movimento do pensamento segue da abstração para a relação concreta, mediada por generalizações teóricas. Em outras palavras, a medição da grandeza C, a partir da unidade E, ocorre mediante a apropriação da lei (modelo universal) em que se manifestam as relações internas – de divisão e de repetição das unidades, indiferentemente da ordem a ser adotada. Desse modo, o suposto é que a apropriação da lei, pelos estudantes, propicia a realização de medições para além do campo dos números inteiros. Por consequência, é possível expressar medidas não exatas, por meio da fração.

Na próxima tarefa, o movimento do pensamento é similar ao da tarefa anterior, pois dá continuidade ao estudo do modelo para as diversas manifestações particulares.

Tarefa 12:

Горбов et al. (2011, p. 40) propõem que o estudante “Encontre o valor de A”, a partir dos dados da figura 66.

Figura 66 – Dados referentes à tarefa 12



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гоплов et al. (2011).

A tarefa apresenta três situações de medidas, que consistem em determinar o valor da grandeza A. Em cada uma delas, o estudante tem acesso aos seguintes registros: quantidade de vezes que a unidade E cabe em A e o valor da unidade E.

No entanto, antes de prosseguir com o processo de cálculo, o professor direcionará a atenção dos estudantes para a representação da unidade, uma vez que ela apresenta uma nova característica em relação à tarefa anterior: a unidade de medida é representada por um valor numérico. Trata-se, nesse caso, de uma quantidade concreta, particular, de uma determinada grandeza. Em vez disso, a unidade da tarefa 11 se apresentou em seu aspecto genérico – como unidade de área – sem a especificação de um tipo particular, por exemplo, metro quadrado, centímetro quadrado, quilômetro quadrado, etc.

A adoção de unidades padronizadas permite que os estudantes realizem as operações – divisão e multiplicação – no plano mental, uma vez que não se faz necessária sua representação na forma sensorial. Nesse caso, a tarefa consiste em expressar, por meio de operações aritméticas, as manifestações do modelo universal.

Na primeira situação, a unidade adotada é uma particularidade da grandeza massa, o quilograma (kg). Nota-se na figura 66, que a unidade E é composta por 45 unidades dessa massa e que a grandeza A corresponde a $\frac{11}{9}$ dessa composição. Para determinar o valor de A, se faz necessário que os estudantes adotem aquelas operações pertinentes ao modelo universal de fração, abstraídas a partir da análise dos fatores - numerador e denominador. Uma dessas operações é a divisão de 45 por 9, pois acompanha o movimento de construção da unidade intermediária expressa no modelo. Outra operação é a repetição dessa nova unidade (resultado da divisão) em 11 vezes para a obtenção da grandeza A. Essas operações traduzem o movimento do pensamento, no plano mental, por

meio de expressões matemáticas, $45 \div 9 = 5$ e $5 \times 11 = 55$. Este último representa a quantidade de massa em quilogramas: $A = 55$ kg. O ideal é que os estudantes recorram à propriedade comutativa. Caso contrário, ela será indicada pelo professor como sugestão. Com isso, ao invés de subdividir a unidade, ocorre sua repetição por 11 vezes ($45 \times 11 = 495$). Por sua vez, faz-se a divisão em 9 partes iguais ($495 \div 9 = 55$). Portanto, resulta no mesmo valor da grandeza A, como obtido anteriormente.

Na segunda situação, a unidade é dada em horas (h), tendo por quantidade 1h. Sua finalidade incide na relação entre a unidade E e o registro $\frac{5}{12}$. No estabelecimento das relações entre a unidade e os fatores da fração, os estudantes constatarão que a divisão 1 por 12 não resultará em um número inteiro. Isso dá oportunidade para a adoção da propriedade comutativa. Por decorrência, é possível a verificação, por parte dos estudantes, de que a unidade repetida por 5 vezes também não é divisível por 12. Dadas as circunstâncias, ocorre um impasse, pois a representação $\frac{5}{12}$ h gera a necessidade de conversão da unidade da grandeza. Nesse momento, cabe ao professor lembrar-lhes que 1h corresponde a 60 minutos ou 3600 segundos. Supondo que eles optem por 60 minutos, os seus registros mentais ou escritos são: $60 \div 12 = 5$ e $5 \times 5 = 25$ ou, também, $60 \times 5 = 300$ e $300 \div 12 = 25$. Assim sendo, $\frac{5}{12}$ h corresponde a 25 min, valor referente à grandeza A.

Na última situação, a unidade é representada pela grandeza comprimento, dada por 6mm. Os procedimentos adotados são semelhantes aos das situações anteriores. Porém, o único meio de resolução é a adoção da propriedade comutativa, pois 6 não é divisível por 4. Desse modo, os estudantes realizarão as seguintes operações: $6 \times 2 = 12$ e $12 \div 4 = 3$. Portanto, a grandeza A possui 3mm de comprimento.

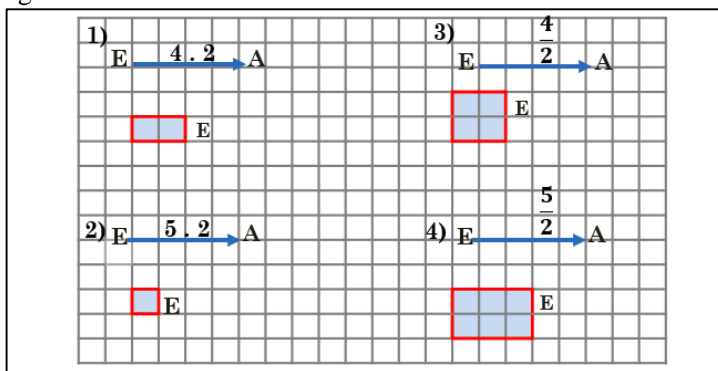
A tarefa 12, em seu todo, traz de que, no processo de pensamento de ascensão da abstração do conceito fração à sua concretização (pensada), tem base a revelação das relações internas em eventos singulares com determinadas especificidades. O processo de medição é definido por uma unidade previamente definida: kg, h e mm. Tais especificações permitem operações mentais de cunho conceitual teórico, por meio do modelo universal. De acordo com Davíдов (1988), construir e transformar um objeto mentalmente constitui sua própria compreensão e a revelação de sua essência. Por isso, a cada nova tarefa, Гопѳов et al. (2006) propõem a reprodução do conceito de fração no contexto de um sistema conceitual que envolve número, multiplicação, divisão, propriedade comutativa, medição de grandezas, entre outros.

A tarefa a seguir trata da generalização teórica do conceito de fração. Em outras palavras, propõe a reflexão sobre o novo campo numérico, em consonância com a gênese do conceito de número.

Tarefa13:

“Construa a área A com o auxílio da unidade E” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 40), tomando por base os dados que compõem a figura 67.

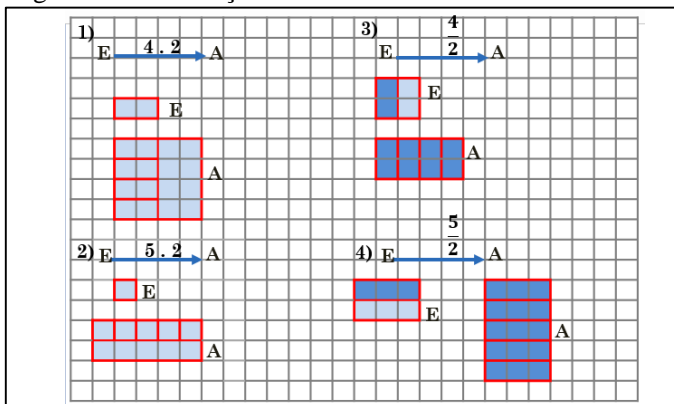
Figura 67 – Dados referentes à tarefa 13



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

Горбов et al. (2006) partem do pressuposto de que os estudantes já se apropriaram do método de resolução da tarefa, por isso não apresentarão dificuldades na sua resolução. Ela se insere, portanto, entre aquelas que colocam as abstrações – que passaram por um processo de apropriação – em movimento de ascensão ao concreto pensado. Para tanto, ela conduz à análise, pelos estudantes, dos registros para a execução dos processos de medição, conforme explicita a figura 68.

Figura 68 – Resolução da tarefa 13



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

A tarefa ainda propõe que os estudantes determinem, em cada situação, a quantidade de vezes que a unidade E cabe na grandeza A e, após, indiquem o resultado pela fórmula $\frac{A}{E} = t$, que corresponde à expressão literal do modelo universal do conceito de número (ГОПБОВ et al., 2006).

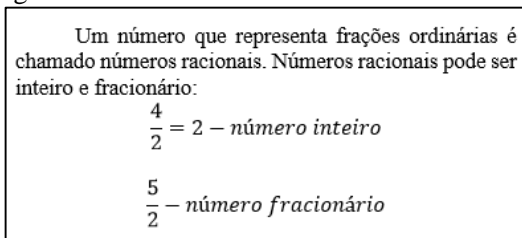
Observa-se (Figura 68) que as duas primeiras situações referem-se ao conceito de multiplicação, cujo registro expressa o produto dos fatores, isto é, a quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete para a obtenção da área A. Nesse caso, os resultados obtidos nas respectivas situações são: $\frac{A}{E} = 8$ e $\frac{A}{E} = 10$. Na situação 3, apesar de o registro estar representado na forma de fração, é possível verificar que a unidade E cabe 2 vezes em A, isto é, $\frac{A}{E} = 2$. Essas três primeiras situações trazem como resultado valores inteiros de medição (ГОПБОВ et al., 2006).

No entanto, a situação 4 se configura entre aquelas que, num processo de ascensão do abstrato ao concreto, solicita a extrapolação de determinada imediatez que, no caso, se trata da medição com característica de número real em sua singularidade natural.

Гопбоб et al. (2006) salientam que a quarta situação retoma o problema de medição para a representação do novo número (fração). Porém, os estudantes também dominam o processo de sua formação, o que lhes permite a descrição na forma de fração. Ou seja, o registro é: $\frac{A}{E} = \frac{5}{2}$. Isso significa dizer que E cabe $\frac{5}{2}$ em A.

Após essa representação, o professor conduzirá as discussões centradas na análise dos resultados das situações 3 e 4. O foco é para o seguinte detalhe: a relação entre grandezas pode resultar em diferentes números (inteiros e fracionários). Emerge, então, a necessidade da generalização desses dois tipos de números. Ou seja, o conjunto daqueles até então conhecidos pelos estudantes – os inteiros – passa a contemplar um novo método de medição que expande para outra singularidade numérica - frações. Portanto, cria-se o conjunto dos números racionais, que expressa medidas inteiras e fracionárias, cuja síntese é registrada, como indica a figura 69.

Figura 69 – Números racionais



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Γορδoς et al. (2011).

Essa especificidade da tarefa 13 – adoção de um novo método que cria a possibilidade de num mesmo processo de medição emergir dois tipos de números (inteiro e fracionário) – revela mais uma característica do modo davydoviano de organização de ensino da Matemática: a ascensão do pensamento ao concreto pensado envolve superação de método para expandi-lo a outro que unifica diferentes qualidades numéricas.

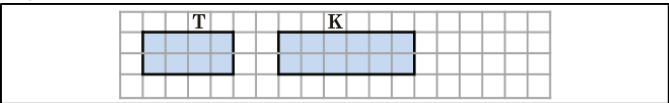
Além disso, nesse processo, entende-se que o pensamento supera o trânsito galgado em definições extraídas da exterioridade do objeto, de modo imediato e contemplativo. Ascender ao concreto pensado cogita por conexões e relações tanto de ordem conceitual como de procedimentos, porém com a necessária e peculiar vinculação interna (KOPNIN, 1978).

A próxima tarefa tem por finalidade a introdução do conceito de frações equivalentes, isto é, um mesmo número é representado por diferentes frações (ΓΟΡΒΟΒ et al., 2006).

Tarefa 14:

“Medir a área de K com a unidade T (Figura 70), adotando diferentes frações de T. Desenhar essas frações. Descreva cada método de medição no esquema. Compare os resultados” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 41).

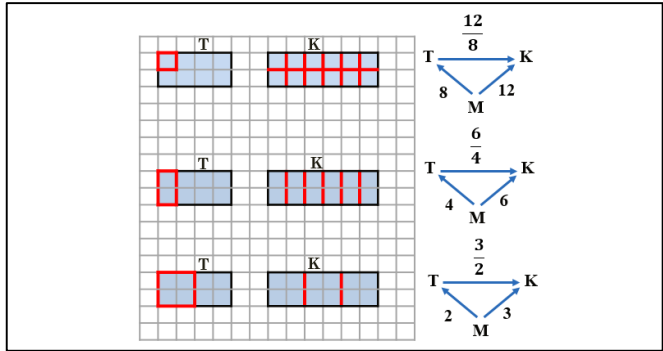
Figura 70 – Dados referentes à tarefa 14



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

A tarefa tem por finalidade a construção, pelos estudantes, de diferentes unidades intermediárias, a partir da medida T, para medir a grandeza K. As apreensões anteriores, referentes ao processo de medição para a obtenção do número racional, colocam os estudantes diante de três possibilidades de construção da medida intermediária. Tais alternativas são determinadas por submúltiplos diferentes de 1, em relação à quantidade de unidades que possui T, uma vez que se dividir a unidade T por 1, resultará ela própria. Como a malha de T é composta de 8 quadrados da malha, é possível considerar os seguintes submúltiplos: 8, 4 e 2. O movimento do pensamento que expressa o processo de medição das três possibilidades é representado na figura 71.

Figura 71 – Resolução da tarefa 14



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Observa-se, na figura 71, que os resultados da medição de K por T são expressos pelas respectivas frações: $\frac{12}{8}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{3}{2}$. Elas subsidiam a continuidade do processo de desenvolvimento da tarefa, que propõe a comparação desses resultados. Essa etapa, de acordo com Гопѳов et al. (2006), admite a suposição de que os estudantes identifiquem que as medidas obtidas correspondem à mesma grandeza. Além disso, que os denominadores (8, 4, 2) e numeradores (12, 6, 3) são múltiplos ou submúltiplos entre si. Contudo, cabe ao professor direcioná-los para estabelecerem relações de igualdade entre as medições, com os seguintes registros: $\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Conforme Гопѳов et al. (2006), esses valores representam o mesmo número racional, denominados de frações equivalentes. Caraça (2002, p. 38) entende por tal denominação como propriedade de igualdade do número racional, de modo que “[...] dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial”.

Vale ressaltar que as relações de igualdade expressam entre si um fator de multiplicidade ou divisibilidade, representado por um valor qualquer (k), o qual estabelece relação com o numerador e o denominador. Em outras palavras, $\frac{m}{n}$ pode ser considerado igual a $\frac{m.k}{n.k}$. A introdução desse conceito, oportunizado pelo desenvolvimento da tarefa, possibilita a elaboração conceitual de outra relação $\frac{3.k}{2.k}$. Portanto, por meio do conceito de multiplicidade, verifica-se que nas frações $\frac{12}{8}$ e $\frac{6}{4}$ o k possui respectivamente os valores 4 e 2, expressados por $\frac{3.4}{2.4}$ e $\frac{3.2}{2.2}$. Por consequência, todas as medidas da grandeza K representam $\frac{3}{2}$ da unidade T, isto é, $K = \frac{3}{2} T$.

O movimento de ascensão do abstrato ao concreto, manifestado pela tarefa, caracteriza-se ao tomar como base de análise a abstração inicial (manifestada pelo modelo universal do conceito de fração) para a apropriação das propriedades conceituais. Nesse caso, dirige-se para a propriedade de igualdade de frações. O movimento peculiar à resolução das tarefas traz uma nova significação conceitual: valores distintos para a mesma grandeza a ser medida. A análise dos resultados permite a comprovação da propriedade de igualdade entre eles. Ocorre, então, a generalização desses valores, sintetizados em um valor único. Com isso, a igualdade numérica não é necessariamente representada por um mesmo

símbolo, por exemplo, $5 = 5$, mas por infinitas possibilidades: $\frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{20}{4},$

...

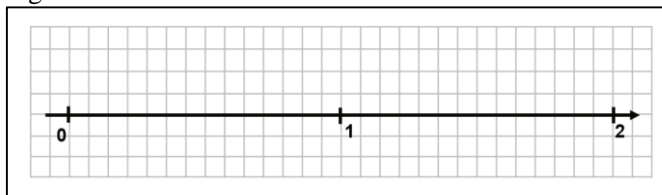
Outro aspecto a considerar no desenvolvimento dessa tarefa é que o processo de concretização no pensamento não ocorre somente pela demonstração, pelo estudante, de que sabe adotar um método de medição e explicitar o resultado. Além disso, requer que ele descreva detalhadamente os procedimentos de resolução.

A tarefa a seguir trata da representação do número racional na reta numérica.

Tarefa 15:

“Marque sobre a reta numérica (Figura 72) o local correspondente ao número $\frac{13}{7}$ ” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 42).

Figura 72 – Dados referentes à tarefa 15



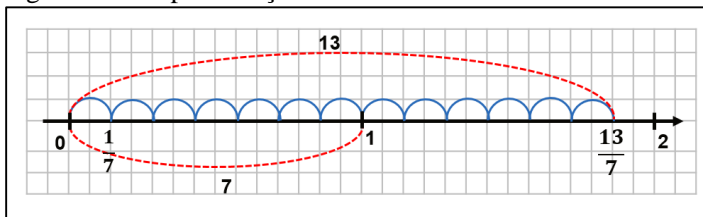
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2011).

A tarefa parte do princípio de que os estudantes tenham se apropriado da construção da reta numérica, introduzida desde o primeiro ano escolar. Além disso, ela é elemento essencial na resolução de tarefas que tratam do desenvolvimento do pensamento de todos os conceitos matemáticos até então tratados. De acordo com Rosa (2012), a reta numérica é um elemento mediador, indispensável para a interpretação geométrica do conceito de número, bem como de suas operações e representações.

Para introduzir a representação geométrica do número $\frac{13}{7}$, faz-se necessária a divisão da unidade em 7 partes iguais e tomá-la por 13 vezes. Observa-se, na figura 72, que a unidade é composta por quatorze unidades da malha, pois entre os números zero e um constam quatorze partes. Proceda-se, então, à divisão da unidade – conforme movimento proposto pelo modelo universal –, que consiste em dividir a unidade em 7 partes iguais, de modo que se obtenha a unidade intermediária correspondente

a $\frac{1}{7}$ (a ser representado por duas unidades da malha). A ênfase é para a representação da unidade intermediária, que deverá ser repetida por 13 vezes, a partir do número de origem (zero), conforme indica a figura 73.

Figura 73 – Representação do número racional na reta numérica



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов et al. (2006).

Pelos registros da figura 73, é possível verificar uma nova forma de representação para os números na reta numérica quando considerada a relação com o modelo universal de fração. Em outras palavras, trata-se da possibilidade de transformação na reta numérica de números inteiros para os números racionais. Para tanto, cria-se um novo sistema de medidas na mesma reta, que possui a mesma origem e destino, porém se considera a unidade intermediária como medida padrão (ГОРБОВ et al., 2006). Por consequência desse novo sistema de representação de medidas, é possível a representação dos números inteiros 1 e 2, respectivamente, por $\frac{7}{7}$ e $\frac{14}{7}$.

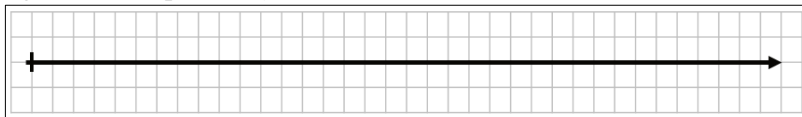
A resolução da tarefa 15 também traz evidências de que o movimento de ascensão do abstrato ao concreto do conceito de fração se constitui por tramas de interconexões e relações conceituais. Nesse caso específico, a reta assume uma nova significação em seu teor numérico: não é lugar exclusivo dos inteiros naturais, mas também dos fracionários.

A tarefa 16 dá continuidade à representação de números racionais na reta numérica. Além disso, tem como objetivo a introdução de novas denominações para os números fracionários, dadas algumas de suas especificidades: próprias e impróprias.

Tarefa 16:

“Represente na reta numérica (Figura 74) os seguintes números 1, 2, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}$,” (ГОРБОВ et al., 2011, p. 43).

Figura 74 – Representação da reta numérica



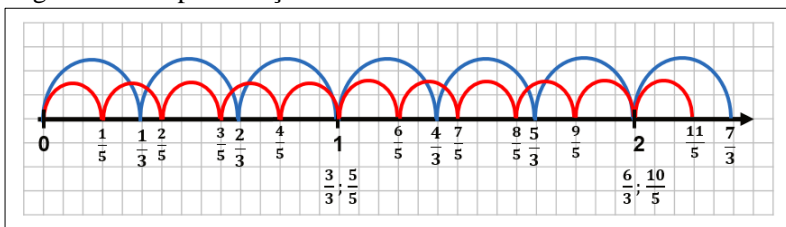
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2011).

Por se tratar de uma tarefa que se insere no contexto de ascensão do abstrato ao concreto, não traz uma solução de imediato. Na análise em busca das possíveis operações de resolução, requisita-se por parte do estudante, a adoção de conceitos e procedimentos já concretizados (concreto pensado), tanto daqueles abordados em anos anteriores, como os referentes à própria fração.

Como momento de análise, é carregada de suposições. Por exemplo, uma das mais viáveis é contar a quantidade de intervalos presentes na reta. Em seguida, buscar um meio de atendimento às seguintes determinações numéricas estabelecidas no próprio enunciado: a) possibilidade de estabelecer duas unidades requisitadas, o que condiciona a adoção de somente quantidades pares; b) a partir da localização da unidade, verificar se os intervalos internos a ela propiciam a divisão, respectivamente, em terços e quintos, outros requisitos da tarefa. Como há 39 intervalos, a possibilidade de dividir por dois parece não ser recomendável, então se tomam 38. Isso significa que cada unidade teria 19 intervalos; porém, não satisfaz a condição de divisibilidade simultânea por 3 e 5. As mesmas impossibilidades ocorrerão ao se adotarem 36, 34 e 32 intervalos. Por isso, o maior número de intervalos que atende todas as exigências numéricas e conceituais impostas pelo enunciado é 30. Desse modo, cada unidade é constituída de 15 intervalos, um terço de 5 intervalos e um quinto de 3.

Para a representação das medidas na reta numérica, os estudantes, primeiramente, devem definir uma origem oposta à direção da reta e, posteriormente, representar os números inteiros 1 e 2, contendo, respectivamente, quinze e trinta intervalos de distância em relação à origem. Na sequência, registrar na reta numérica (Figura 75) os valores cujos denominadores são terços e quintos, de modo que o movimento do pensamento se volte para a relação essencial – subdivisão da unidade – manifesta no modelo universal, dada no plano mental.

Figura 75 – Representação da reta numérica: números racionais



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Гопбоб et al. (2006).

Observa-se (Figura 75) que a construção das medidas de números racionais também apresenta a propriedade da sequência numérica como nos números inteiros. Essa propriedade consiste em fixar o denominador e sequenciar o numerador expresso pelas relações $\frac{m-1}{n}$ (antecessor) e $\frac{m+1}{n}$ (sucessor). Assim sendo, $\frac{2}{3}$ pode ser obtido a partir do seu antecessor $\frac{1}{3}$, isto é, $\frac{1+1}{3}$, bem como $\frac{9}{5}$ pode ser obtido a partir do seu sucessor $\frac{10}{5}$, representado por $\frac{10-1}{5}$.

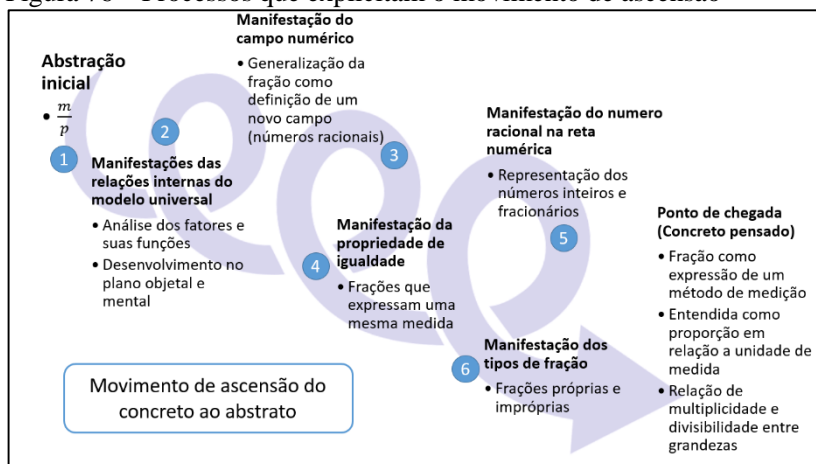
A tarefa ainda propõe que os estudantes verifiquem quais dos números são menores que 1. Eles constatarão, mediante a análise da reta numérica, que os registros $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ são menores que 1, pois suas localizações na reta estão entre os números 0 e 1. Cabe ao professor sugerir a comparação dos registros obtidos com as outras frações, de forma que identifiquem as suas diferenças. Diante das variáveis, é possível que os estudantes identifiquem que uma distinção consiste na relação entre numerador e denominador. Ou seja, para as frações menores que 1, os numeradores são menores que seus denominadores. Por sua vez, as frações maiores que 1 têm seus numeradores maiores que os respectivos denominadores. Além disso, o professor informará que a diferença também reside na quantidade de vezes que as unidades – básica e intermediária – se dividem e se repetem. Em outras palavras, se a quantidade de divisões for maior que as repetições, resulta em um valor menor que a unidade de medida, definida como fração própria⁷⁶. Se a quantidade de repetições for maior que a de divisões, o valor resultante será maior que a unidade, definida como fração imprópria (ГОПБОБ et al., 2006).

⁷⁶ O número misto se trata de uma fração imprópria e será introduzida em tarefas posteriores.

As tarefas discutidas na presente seção são, para nós, representativas da explicitação das características do movimento de pensamento – ascensão do abstrato ao concreto do conceito de fração. No entanto, vale frisar que elas não constituem a totalidade daquelas que Davýdov e colaboradores propõem para a referida finalidade. Elas, em si, revelam que cada qual traz um novo componente conceitual ou uma inter-relação com as apropriações efetivadas, que caracterizam a concretização, no pensamento, das abstrações essenciais que se constituíram no processo anterior de redução.

Finalizamos a presente seção e, por extensão, o capítulo, com o esquema que explicita os processos realizados pelo pensamento, movimento de ascensão (Figura 76).

Figura 76 – Processos que explicitam o movimento de ascensão



Fonte: Da autora.

No esquema da figura 61, final da seção 3.1, explicitamos a síntese que consideramos pertinente aos processos (análise e sínteses) do pensamento, reveladores do movimento de redução do concreto ao abstrato. O esquema da figura 76 traz nosso esforço de síntese das apreensões referentes ao processo de pensamento pertinente ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto. Vale enfatizar que nossa referência é a introdução do conceito de fração.

Para fins didáticos, identificamos a sequência dos elementos essenciais do processo pela numeração de 1 a 6, cada qual indica as particularidades/finalidades. Tem como ponto de partida a *abstração*

inicial (1). Posteriormente, destacamos as quatro manifestações necessárias ao processo de concretização: *relações internas* (2), *campo numérico* (3), *propriedade de igualdade* (4), *número racional na reta numérica* (5). Por fim, indicamos o *ponto de chegada* (6).

A abstração inicial, advinda do processo de redução no pensamento, se caracteriza como um estágio em devir, para a concretização do conceito. No entanto, como diz Davýdov (1982), não é abstração do tipo empírico. Ela é concreta, por possibilitar a busca da revelação das conexões que se produziram historicamente, bem como as contradições e as conexões essenciais para a concretização do conceito. A partir dela é que se delineia uma série em cadeia de determinações (DAVÝDOV, 1982) que, no caso dos números fracionários, se manifestam, entre outras, nas especificações (2 a 6) da figura 76. Portanto, o ponto de chegada, concreto conceitual no pensamento, é a síntese de múltiplas determinações (DAVÝDOV, 1982).

Nossa expectativa é que o esquema subsidie a compreensão, por parte do leitor, desse complexo movimento em relação ao desenvolvimento do pensamento conceitual de fração. Além disso, contribua para apreensões de um modo de organização do ensino que vise ao desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente capítulo, apresentamos as sínteses que refletem o movimento desta pesquisa. Vale destacar, no entanto, que nossas reflexões tiveram como centralidade algumas tarefas específicas do modo davydoviano de organização do ensino, que evidenciam os dois movimentos do pensamento – redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto – referentes a apropriação do sistema conceitual de fração.

Importa lembrar que a investigação voltou-se para a elaboração de uma resposta à sua pergunta norteadora: Quais as manifestações do movimento do pensamento – redução e ascensão – nas tarefas particulares do modo davydoviano de organização do ensino, quando colocadas em situação escolar, para a apropriação do sistema conceitual de fração? Partimos do pressuposto de que o processo de apropriação contempla o movimento que expressa a lógica conceitual de fração. Não perdemos de vista o *objetivo geral* de investigar os referidos movimentos, com destaque para a apropriação do sistema conceitual de fração, de modo que revelasse a sua base universal. Para tanto, movemo-nos pela compreensão elaborada com base no referencial teórico de que o universal aparece na forma de lei. Nesta, manifestam-se as propriedades internas do conceito, inobserváveis de imediato pelos órgãos dos sentidos. Elas são reveladas e fixadas pelo pensamento, mediante o processo de abstração e generalização (ROSA, 2012).

A importância, para nós, desse entendimento está na acentuada preocupação de Dávidov (1988) com uma organização do ensino que propicie, aos estudantes, o desenvolvimento do pensamento teórico, caracterizado por abstrações e generalizações do tipo substanciais (teóricas). Essas duas ações cognitivas “[...] encontram sua expressão no conceito teórico que serve de procedimento para deduzir os fenômenos particulares e singulares de sua base universal” (DAVÍDOV, 1988, p. 152)⁷⁷. A valorização delas no processo de ensino se dá pela natureza teórica, o que permite a revelação, por via do procedimento de análise, da relação geneticamente essencial de certo sistema conceitual integral.

Para a apreensão desses e dos demais elemento conceituais – abstração, generalização, análise, síntese, conceito, entre outros – responsáveis pelo desenvolvimento dos movimentos (redução e

⁷⁷ [...] hallan su expresión en el concepto teórico que sirve de procedimiento para deducir los fenómenos particulares y singulares de su base universal (DAVÍDOV, 1988, p. 152).

ascensão), recorreremos aos estudos de vários autores. Dentre eles, destacamos: Kopnin (1978; 1958), Rosental (1962; 1956), Kosik (1995), Davýdov (1987) e Davýdov (1988).

Conforme esses autores, a base do desenvolvimento do pensamento consiste no processo de abstração e generalização, emergente por meio dos procedimentos de análise e síntese. Tais mediações ocorrem tanto no movimento de redução quanto no de ascensão. No processo de redução, o pensamento se move a fim de revelar a manifestação da relação essencial, que se constitui em abstração inicial. Sobre esta base, encontra-se a essência que, como fonte única, determina as demais particularidades do todo (DAVÍDOV, 1988). Ao atingir o conhecimento da essência – por meio do movimento de ascensão – o pensamento se move da definição abstrata para a reprodução do “[...] sistema de nexos e relações característicos do objeto dado como integridade concreta (ROSENTAL, 1962, p. 496)⁷⁸.

Com a compreensão dos respectivos movimentos, iniciamos a análise das abstrações e generalizações pertinentes às tarefas particulares do conceito de fração. Para tanto, foi decisiva a finalidade, estabelecida previamente, de abstrairmos a essencialidade e a diversidade dos nexos que constituem o referido conceito matemático. Isso se deu em decorrência dos seguintes objetivos específicos que estabeleciam a pretensão de investigar: a relação genética/substancial que determina a essência do conceito de fração; as representações que compõem o elemento mediador para reprodução dos nexos essenciais do conceito de fração; os processos de análise e síntese no movimento do pensamento para a abstração e a reprodução do sistema conceitual de fração.

A análise centrou-se na unidade: o movimento do pensamento do concreto ao abstrato (redução) ↔ movimento do pensamento do abstrato ao concreto (ascensão).

Na especificidade do movimento do pensamento conceitual de fração, o processo de redução do concreto ao abstrato, a relação essencial do conceito surge mediante o problema de medição. Este se apresenta na relação em que a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza a ser medida. Tal impossibilidade gera a necessidade de se desenvolver um novo método de medição, a ser modelado e apropriado pelos estudantes a partir da análise dos métodos antigos.

O novo método traz como característica a subdivisão da unidade de medida, o que faz a unidade se transformar em outra, numa unidade

⁷⁸ [...] sistema de nexos y relaciones característicos del objeto dado como integridad concreto (ROSENTAL, 1962, p. 496).

intermediária, a fim de expressar com maior exatidão a medição da grandeza em partes da unidade (ALEKSANDROV, 1973). Esse movimento de transformação revela os nexos internos do conceito de fração: a divisão da unidade básica e a repetição da unidade intermediária e vice-versa, com a adoção da propriedade comutativa.

Com o surgimento dos nexos, o pensamento se volta para a generalização do método. Trata-se, pois, da modelação da relação universal, com a adoção de sistemas de representação nas seguintes configurações: objetual, gráfica e literal. A modelação traduz a essência do conceito na forma de lei, que se revela por consequência do surgimento da necessidade de outras generalizações. No processo de construção de tais sistemas, manifestam-se abstrações referentes à ordem e à função dos fatores. São elas que dão as condições para a identificação das operações (multiplicação e divisão) e ordem de sua execução. Ao mesmo tempo, manifestam a possibilidade de aplicação da propriedade comutativa no novo processo de medição.

A partir da generalização das duas relações de medição, intrínsecas à propriedade comutativa, há a manifestação da lei, que expressa ambas as relações em um único registro literal: $\frac{m}{p}$. Tal registro constitui-se em ponto de partida para o movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

Com a revelação da relação essencial em sua forma abstrata, o pensamento segue o movimento da abstração inicial para o estudo da diversidade dos fenômenos, a fim de alcançar a generalização do conceito de fração. Ou seja, no movimento de ascensão o pensamento se move na busca de evidências que caracterizam o aparecimento de suas especificidades. Assim sendo, no processo de generalização do conceito surge o indício de que também é possível a representação de um número inteiro por meio de uma fração. Porém, isso ocorre desde que a quantidade de divisões seja submúltiplos da quantidade de repetições ($\frac{4}{2} = 2$). Tal relação evidenciada permite que o pensamento ascenda ao conjunto dos números racionais: inteiros e fracionários.

Outra manifestação advinda do modelo universal é a propriedade de igualdade entre frações, que se manifesta a partir da mediação de uma grandeza com uma mesma unidade de medida. Nesse caso, indiferente da divisão da unidade básica, explicita uma razão única entre grandeza e unidade. Em outras palavras, tal razão é modelada com valores distintos de numerador e denominador, a partir de divisões distintas. Porém, possuem uma relação de multiplicidade em comum, expressa por um fator.

O modelo universal ainda expressa outra propriedade do conceito de fração: a relação de valores entre numerador e denominador. Para tanto, requer a análise da medida entre ambos, o que resulta em dois tipos de fração: frações próprias – denominador maior que numerador – e frações impróprias – relação inversa. Esses tipos de frações são apreendidos mediante a análise na reta numérica, o que torna possível aos estudantes abstrair frações com valores menores que 1, uma vez que eles ainda não se apropriaram da representação decimal⁷⁹

Observa-se que os dois movimentos são marcados por múltiplas relações com peculiaridades e níveis distintos de complexidade conceitual. Mesmo partindo do concreto sensível, por meio de processos mediados, o pensamento busca a abstração e a generalização das conexões internas que constituem o conceito, isto é, a manifestação de sua essencial lei e causa. A apropriação dos nexos internos – multiplicidade e divisibilidade da unidade, relação entre grandezas, função e ordem dos fatores, entre outros – possibilita, no processo de resolução das tarefas, a evidenciação das propriedades e características para a apropriação teórica do conceito de fração.

A análise das tarefas particulares também nos possibilitou o entendimento de que o modo de organização do ensino proposto por Davýdov e colaboradores tem características distintas do que presenciamos e vivemos no sistema educativo brasileiro. Uma delas é o próprio movimento do pensamento que expressa a apropriação do conceito, isto é, parte das relações gerais e substanciais para as manifestações particulares. Como já explicitamos nessa investigação, o pensamento se move inicialmente na busca da revelação da relação essencial que constitui o conceito, para posteriormente reproduzi-lo enquanto sistemas de relações, como síntese de múltiplas determinações (DAYÝDOV, 1982). No entanto, vale enfatizar que não se trata de um movimento voltado apenas para a apropriação do sistema conceitual de fração. Este por sua vez é peculiar ao processo de apropriação de qualquer conceito, sejam eles referentes ao 1º, 2º, 3º, 4º ou 5º ano. Isso significa dizer que cada conceito é apropriado na relação com outros conceitos, dentro de um sistema conceitual. No caso do conceito de fração, a revelação de sua base universal parte da análise de procedimentos já apropriados pelos estudantes, em anos anteriores, como por exemplo: os procedimentos adotados para a obtenção do conceito de número (introduzido no primeiro ano) e os conceitos de multiplicação e de divisão (introduzido segundo ano).

⁷⁹ Vale enfatizar que na proposição de ensino davýdoviana o número fracionário é apresentado antes do número decimal.

Diferente do que ocorre nas proposições de ensino brasileiro, que orientam o pensamento dos estudantes com definições obtidas a partir de situações particulares, com predomínio do conteúdo cotidiano. Quem de nós vivenciou – como estudante da Educação Básica – ou pôde observar em livros didáticos que a introdução do conceito de fração ocorre com a observação de pizzas ou barra de chocolates cortadas em fatias? Ou, ainda, dividir figuras geométricas (quadrado e retângulo) e pintar determinadas partes?

Conforme Davýdov (1982), a apropriação apenas desse tipo de conteúdo, senso comum, faz com que se desenvolva nos estudantes o pensamento empírico.

Nossa inferência, aparentemente pessoal, tem respaldo na literatura. Ao analisar um livro didático brasileiro referente ao conceito de fração, Rosa et al. (2013) apresentam algumas constatações:

só contempla as significações aritméticas; não traz a representação na reta numérica; secundariza a identificação da grandeza considerada; embora não seja explícito, a unidade de medida é parte do todo; há forte relação às situações do dia-a-dia dos estudantes; e, a maioria das frações apresentadas é menor que uma unidade (ROSA, et al., 2013, p. 243).

Além disso, a ênfase é para as relações discretas que estão relacionadas às situações corriqueiras dos estudantes, conforme exemplos indicados por Rosa et al. (2013): quanto é $\frac{1}{4}$ de litro de leite, $\frac{1}{2}$ de uma pizza, $\frac{2}{8}$ de uma barra de chocolate, entre outras. No caso da pizza, o livro enfatiza que um inteiro é composto por duas partes, sendo que cada uma delas corresponde a um sabor. A relação implícita que se estabelece é tipicamente de número natural, qual seja: uma parte mais a outra totalizam duas partes. Portanto, o que se manifesta, conceitualmente, é a representação da contagem de quantidades discretas (ROSA et al. 2013).

Da mesma forma, as análises empreendidas em nossa pesquisa nos permitem dizer que o ensino de fração proposto por Davýdov apresenta diferenças significativas em relação àquelas apresentadas nos estudos de Silva (2011) e Amorim (2007). Isso ocorre tanto no que se refere ao conteúdo quanto ao método proposto para a organização do ensino.

Na proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores o conteúdo e o método se voltam para a apropriação do conceito teórico, pois partem da análise do processo de medição – representado pelo

modelo geral do conceito de fração – para a apropriação das significações do conceito. Diferentemente do conteúdo e do método apresentados por Silva (2011), que partem de definições abstratas, abordadas isoladamente sem estabelecerem uma conexão interna entre ambas as relações manifestadas pelos conceitos: parte-todo, razão, divisão ou quociente e operador multiplicativo.

No entanto, a pesquisa de Amorim (2007) apresenta o conteúdo similar ao da proposta davydoviana, ou seja, considera as relações gerais do conceito – a relação entre grandezas, a subdivisão da unidade, as relações de multiplicidade e divisibilidade. Porém, a diferença está no método, pois, ao propor a situação de ensino para o conceito de fração, Amorim recai no desenvolvimento de situações particulares, nas quais o movimento do pensamento se expressa do particular para o geral.

Diante disso, podemos dizer que, dentre as proposições de ensino às quais tivemos acesso, a proposição davydoviana é que possibilita o pleno desenvolvimento do pensamento teórico do conceito de fração. Isso porque a análise das tarefas particulares levou-nos ao movimento de pensamento para compreendermos os procedimentos de análise e síntese, abstração e generalização, conceito e essência, a fim de revelarmos os nexos internos que constituem a lei, expressa no modelo universal.

Por fim, vale dizer que o envolvimento nesta pesquisa foi marcado por momentos de dificuldades e desafios, que se manifestaram tanto no processo de compreensão dos movimentos de redução e ascensão quanto no processo de resolução das tarefas particulares referentes ao conceito de fração. Isso porque esse processo se constitui na confluência, às vezes não identificáveis, de duas atividades tipicamente humanas: estudo e pesquisa. Mas, se chegamos nesse nível de compreensão do nosso objeto e problema de pesquisa, então demonstramos que isso foi um processo dialético. E, como tal, também caracterizado por superação que resultou não só na aprendizagem do conceito em análise – a fração –, mas na compreensão do modo davydoviano de organização do ensino, orientado para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Contudo, a presente pesquisa desperta ainda a vontade de aprofundar o estudo do conceito de fração. Tal vontade pode ser explicitada pelo seguinte questionamento: Como se manifestam no conceito de fração as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, tendo por base o estudo do modelo universal? Ou ainda: Na continuidade, as tarefas propostas por Davýdov e colaboradores mantêm o nível de organicidade que colocam os estudantes em permanente movimento de desenvolvimento do pensamento teórico?

REFERÊNCIAS

- ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Universidad, 1973.
- ALVES, E. S. B. **Proposições brasileiras e davydovianas**: limites e possibilidades. 2013. 119 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.
- AMORIM, M. P. **Apropriação de significações do conceito de números racionais**: um enfoque Histórico-Cultural. 2007. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, UNESC, Criciúma, 2007.
- ANDERY, M. A. et al. **Para compreender a ciência**: uma perspectiva histórica. 11. ed. Rio de Janeiro: Espaço e Tempo; São Paulo: EDUC, 2002.
- BORDEAUX, A. L. et al. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 1º ano. São Paulo: Editora do Brasil, 2008.
- BÚRIGO, L. S. M. **Necessidades emergentes na organização do ensino davydoviano para o número negativo**. 2015. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, UNESC, Criciúma, 2015.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2002.
- CLASSEN, C.; HOWES, D.; SYNNOTT, A. **Aroma**: The Cultural History of Smell. London: Taylor and Francis, 2002.
- CRESTANI, S. **Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão**. 2013. 70 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.
- D'ALBERTAS, C. et al. **Matemática**, 1º ano. São Paulo: Atual, 2009 (Projeto Descobrir).

DAMAZIO, A. et al. Possibilidades didáticas para apropriação de conceitos matemáticos: uma análise a partir de painéis decorativos. In: SIMPÓSIO SOBRE FORMAÇÃO DE PROFESSORES: EDUCAÇÃO, CURRÍCULO E ESCOLA, 6., 2014, Tubarão. **Anais eletrônicos...** Tubarão: UNISUL, 2014, p. 1-18.

DAVÍDOV, V. V. Desarrollo psíquico en el escolar pequeño. In: PETROVSKI, A. V. (Org.). **Psicología evolutiva y pedagógica**. 2. ed. Moscú: Progreso, 1985, p. 80-119.

_____. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987, p. 143-155.

_____. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación teórica y experimental. Moscú: Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987, p. 316-337.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. In: MUDRIK, A. **La educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscú: Progreso, 1991, p. 118-144.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DORIGON, J. C. G. **Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação**. 2013. 90 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, 1-36, 1995.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS, A.; ELKONIN, D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987, p. 300-315.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas Formal e Dialética**. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOPNIN, P. V. Lo abstrato y lo Concreto. In: ROSENTHAL, M. M.; STRAKS, G. M. (Orgs.). **Categorías del materialismo dialectico**. México: Grijalbo, 1958, p. 299-320.

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1995.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LIBÂNIO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia, MG: EDUFU, 2013, p. 315- 350.

LONGAREZI, A. M.; FRANCO, P. L. J. A. N. Leontiev: a vida e a obra do psicólogo da atividade. In: LONGAREZI, A.; PUENTES, R. V. **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia, MG: Edufu, 2013.

MADEIRA, S. C. **“Prática”**: uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MAME, O. A. C. **Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental na proposição de Davýdov**. 2015. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

MATOS, C. F. **Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental**. 2013. 168 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydvov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

_____. **O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do Estado de Santa Catarina e na abordagem Histórico-Cultural**. Dissertação (Mestrado em Educação: linha de pesquisa Educação Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

ROSA, J. E. et al. Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural. **REVEMA**, Florianópolis, v. 08, n.10, p. 227-245, 2013.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e subtração em Davydvov. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, jul./dez., 2013.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydvov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.1, p. 167-187, 2014.

ROSENTAL, M. M. **Princípios de Lógica Dialética**. Tradução de Augusto Vidal Boget. Uruguai: Montevidéu, 1962.

ROSENTAL, M. **Da teoria marxista do conhecimento**. Rio de Janeiro: Editorial Vitória, 1956.

SAOSEROV, M. I. El fenomeno y la esencia. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorías del Materialismo Dialéctico**. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1958, p. 54-82.

SILVA, W. R. da. **O ensino de matemática na escola pública: uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração**. 2011. 260 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2011.

SILVEIRA, G. M. **Unidade entre Lógico e Histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração**. 2015. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

SILVEIRA, G. M. **Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydvov**. 2012. 112f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

SOUZA, M. B. **O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna**. 2013. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

STERNIN, A. O. Lo singular, lo particular y lo universal. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorías del Materialismo Dialéctico**. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1958, p. 257-297.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Ed. Atlas, 1987.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Bezerra P. Trad. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ГОРБОВ, С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 1 класс:** Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е изд., перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. -128с.: ил.

ДАВЫДОВ, В. В. et al. **Математика:** Учебник для 2 класса начальной школы. В 2-х кн. (Система Д. Б. Эльконина - В. В. Давыдова).11-е изд. - М.: ВИТА-ПРЕСС, 2012.- 96 с.: ил.

ДАВЫДОВ, В. В. et al. **Математика:** Учебник для 3 класса нач. школы (Система Д. Б. Эльконина - В. В. Давыдова).В 2-х кн. 7-е изд. - М.: ВИТА-ПРЕСС, 2009. - 112 с.: ил.

ДАВЫЛОВ, В. В; ГОРБОВ, С. Ф.; МИКУЛИНА, Г. Г.
Математика: Учебник для 4 класса нач. школы (Система Д. Б. Эльконина - В. В. Давыдова).В 2-х кн. 8-е изд. - М.: ВИТА-ПРЕСС, 2011а. - 144 с.:ил.

ДАВЫДОВ, В.В.; ГОРБОВ, С. Ф.; МИКУЛИНА, Г. Г.
математика: учебник для 4 класса нач. школы (система д. б. эльконина - в.в. давыдова). в 2 - х кн. книга 2/. - 8-е изд - м.: ВИТА - ПРЕСС, 2011б. - 128 с.: ил.

ГОРБОВ, С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В.
Обучение математике. класс: Пособие для учителей начальной школы. 2-е изд., перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2004.

ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБЧНИКОВА, Н. Л. **Обучение математике:** 5 класса. пособие для учителя (система д. б. эльконина - в.в. давыдова)./. - м.: ВИТА - ПРЕСС, 2006. - 178 с.: ил.

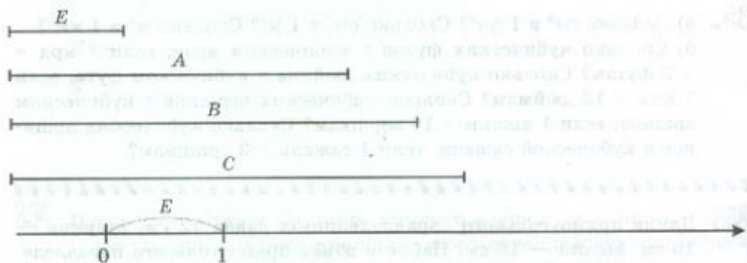
ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБЧНИКОВА, Н. Л. **математика:** учебник тетрадь для 5 класса общеобразоват.учрежд. (система д. б. эльконина - в.в. давыдова). в 3 - х частях. часть 2. /. - 4-е изд - м.: ВИТА - ПРЕСС, 2011. - 80 с.: ил.

ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; ЗАХАРОВА, О. А.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБАЧНИКОВА, Н. Л. **Математика:** Учеб. пособие для класса общеобразоват. учрежд. (Система Д. Б. Элькснжна — Б. В. Давыдова). 2-е изд. М.: Вита-Пресс, 2007. - 80 с ил.

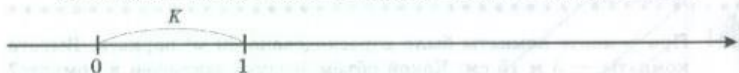
ANEXOS

ANEXO A: Tarefas 1 e 2

357 а) Измерьте длины A , B и C единицей E . Отметьте на числовой прямой полученные числа.



б) Отметьте те же числа на числовой прямой с другим шагом.

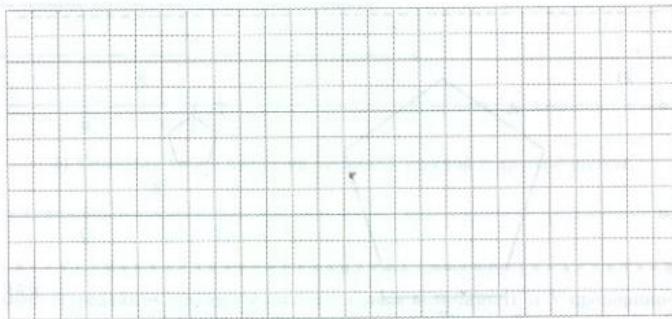
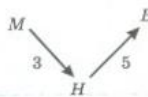
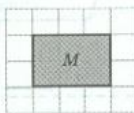


359 Отметьте на координатной прямой точку с координатой a , где $a = 9 : 5$. Какой для этого надо выбрать шаг?



ANEXO C: Tarefas 4 e 5

361 Постройте фигуры с площадями T и B , если:



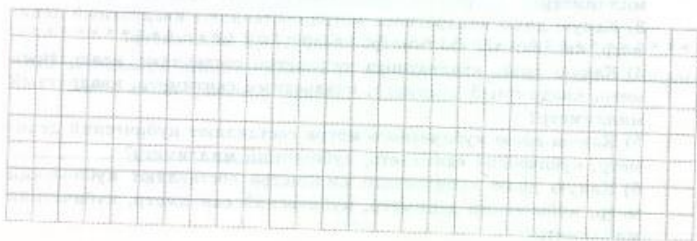
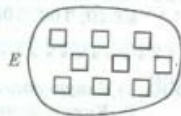
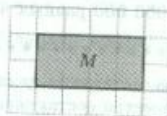
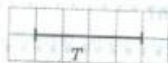
362 Сравните старый и новый способы использования промежуточной мерки при измерении-отмеривании величины. Опишите их по этапам.

Старый способ	Новый способ
1. _____	1. _____
_____	_____
2. _____	2. _____
_____	_____

ANEXO D: Tarefa 6

363 Отмерьте величину с помощью заданной единицы, если:

- 1) $T \xrightarrow{2} C \xrightarrow{5} K$ 2) $M \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} A$ 3) $E \xrightarrow{3} P \xrightarrow{4} H$



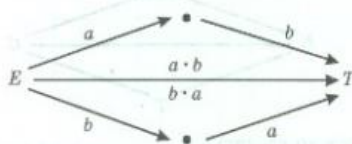
Если величина разбита на равные части, то одна такая часть называется **долей** величины. Название доли зависит от того, на сколько равных частей разбили величину. Если величину разбили:

- на две равные части, то одна такая часть называется **второй** долей или **половиной**;
- на три равные части, то одна такая часть называется **третьей** долей или **третью**;
- на четыре равные части, то одна такая часть называется **четвёртой** долей или **четвертью**;
- на пять равных частей, то одна такая часть называется **пятой** долей;
- на шесть равных частей, то одна такая часть называется **шестой** долей

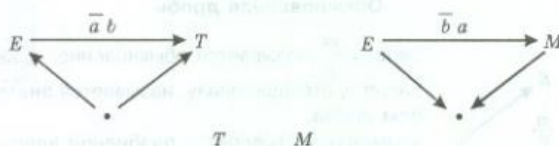
и т. д.

ANEXO F: Tarefa 9 e 10

373 В произведении множители можно менять местами.

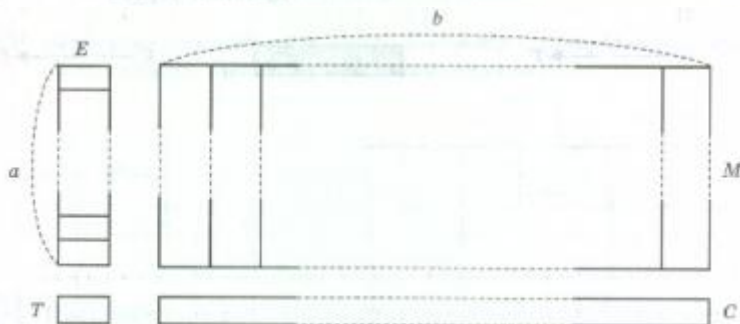


А можно ли в новом способе отмеривания величины менять места-ми действия \bar{a} (разбиения на a равных частей) и b (повторения величины b раз)? Равные ли величины при этом получатся? Проверьте ваше предположение, выполнив построения (выбирая разные единицы E и числа a и b).

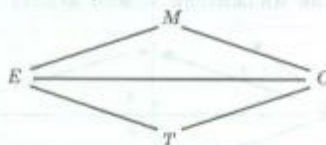


374 На чертеже схематически показано, как отмеривается площадь C единицей E :

- 1) с помощью промежуточной величины T ;
- 2) с помощью промежуточной величины K .



Опишите оба способа построения одной схемой.



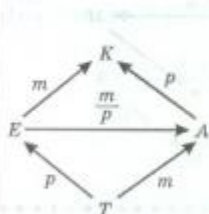
Какой вывод можно сделать?

.....

.....

.....

Обыкновенная дробь



Запись $\frac{m}{p}$ называется обыкновенной дробью.

Число p , стоящее внизу, называется **знаменателем** дроби.

Знаменатель говорит о разбиении величины на равные части. Он показывает, на сколько равных частей разбивается эта величина (E или K).

Число m , стоящее сверху, называется **числителем** дроби.

Числитель говорит о повторении величины. Он показывает, сколько раз надо повторить величину (долю T или единицу E).

Черта, отделяющая числитель дроби от её знаменателя, называется **дробной чертой**.

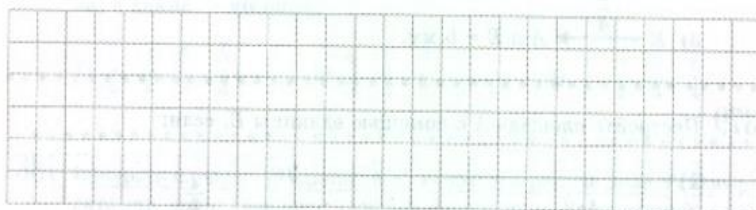
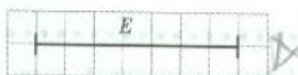
ANEXO G: Tarefas 11e 12

375 Постройте величину C с помощью единицы E двумя способами, если:

1) $E \xrightarrow{\frac{8}{6}} C$



2) $E \xrightarrow{\frac{5}{7}} C$



378 Найдите величину A , если:

1) $E \xrightarrow{\frac{11}{9}} A$ и $E = 45$ кг;

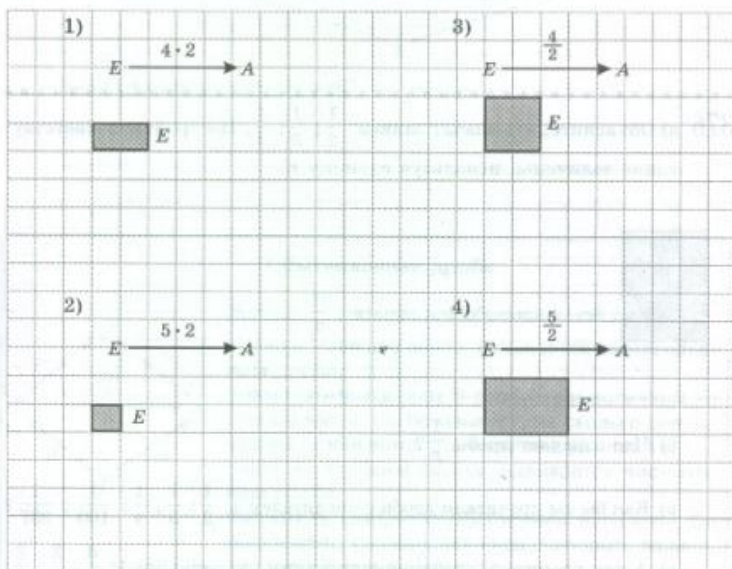
2) $E \xrightarrow{\frac{5}{12}} A$ и $E = 1$ ч;

3) $E \xrightarrow{\frac{2}{4}} A$ и $E = 6$ мм.



ANEXO H: Tarefa 13

379 Постройте площадь A с помощью единицы E , если:



Сколько единиц E укладывается в величине A ? Найдите это число (в каждом случае).

Числа, которые представляются обыкновенными дробями, называются **рациональными числами**.

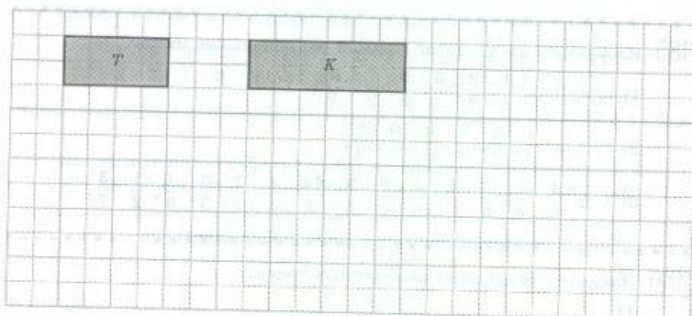
Рациональные числа могут быть целыми и дробными:

$$\frac{4}{2} = 2 \text{ — целое число,}$$

$$\frac{5}{2} \text{ — дробное число.}$$

ANEXO I: Tarefas 14, 15 e 16

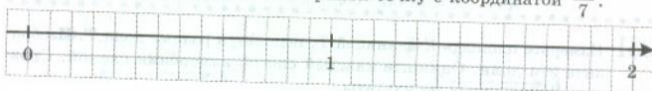
- 381 Измерьте площадь K единицей T , используя разные доли T . Изобразите эти доли. Опишите каждый способ измерения схемой. Сравните полученные результаты.



Обыкновенные дроби, представляющие одно и то же рациональное число, называются **равными дробями**:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8}.$$

- 384 Отметьте на координатной прямой точку с координатой $\frac{13}{7}$.



- 387 Изобразите на числовой прямой следующие числа:

1, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{11}{5}$.



Какой шаг надо выбрать, чтобы можно было изобразить на числовой прямой все эти числа? Какие из этих чисел меньше числа 1?

Правильные и неправильные дроби
